

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

ACTA
MATHEMATICA

Math
A



ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

21

167982.

13/12/21

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.
1897.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS

A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

QA

A2575

N. 21

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
A. LINDSTEDT, Stockholm.
G. MITTAG-LEFFLER, »
E. PHRAGMÉN, »

NORGE:

C. A. BJERKNES, Christiania.
ELLING HOLST, »
S. LIE, Leipzig.
L. SYLOW, Fredrikshald.

DANMARK:

J. PETERSEN, Kjöbenhavn.
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

L. LINDELÖF, Helsingfors.

OSCARI II

SUECIE ET NORVEGIE REGI AUGUSTISSIMO

POETE SPIRITU CELSO NON MINUS QUAM MOLLI SUAVITATE MIRANDO
ORATORI ELOQUENTIE DIVINA VI ET DULCEDINE GRATA CLARISSIMO
MULTIS MUSARUM ARTIBUS PERITISSIMO
ATQUE OMNI ERUDITIONIS LAUDE PER ORBEM CELEBERRIMO
HOMINI CUI NIHIL HUMANI ALIENUM
QUI QUIDQUID MAGNI BONIQUE EST
MENTIS ACIE COGITATUM, SAGACITATE SPIRITUS INVENTUM
SAPIENTER PROTEGIT ET PROMOVET

AD FESTUM TRIUMPHALE
IN MEMORIAM LÆTISSIMAM VIGINTI QUINQUE ANNORUM
PER QUOS FELICITER ET GLORIOSE REGNAVIT
CELEBRANDUM

PRIMUM TERTIÆ DECADIS HORUM ACTORUM VOLUMEN
QUÆ SUMMIS EIUS AUSPICIS ET SUBSIDIIS EFFICACIBUS
IN LUCEM PROLATA
PROGRESSUS SUOS IN TOTO DOCTORUM ORBE PROSPEROS
HUIC PRÆSIDIO PERPETUO
HUIC AUXILIO SEMPER PRÆSENTI
DEBENT

D. D. D.
EDITOR

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 21. — 1897. — TOME 21.

	Seite. Pages.
AUTONNE, LÉON. Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes	249—264
BOREL, ÉMILE. Sur les séries de Taylor.....	243—248
DARWIN, G. H. Periodic Orbits	99—242
KANTOR, S. Theorie der Transformationen im R_3 , welche keine Fundamentaleurven 1. Art besitzen.....	1—78
KLUYVER, J. C. A special case of Dirichlet's problem for two dimensions.....	265—280
MITTAG-LEFFLER, G. Weierstrass	79—82
d'OCAGNE, MAURICE. Théorie des équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés	301—330
POINCARÉ, H. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps	83—98
POINCARÉ, H. Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique.....	331—342
VAHLEN, K. TH. Der Fundamentalsatz der Algebra und die Auflösung der Gleichungen durch Quadratwurzeln	287—300

Inhaltsverzeichnis der zwanzig ersten Bände nebst Namenregister der Bände 11 bis 20. — Table des matières contenues dans les vingt premiers volumes suivie d'une table générale par noms d'auteurs des volumes 11—20

343—370

THEORIE DER TRANSFORMATIONEN IM R_1 , WELCHE KEINE FUNDAMENTALCURVEN 1. ART BESITZEN UND IHRER ENDLICHEN GRUPPEN

VON

S. KANTOR

We have first raised a dust and then
complain, that we cannot see. BERKELEY.

Bei der Begründung einer allgemeinen Theorie der periodischen Transformationen und ihrer endlichen Gruppen im R_3 und im R_r begegnet man so vielen neuen Erscheinungen und hat sich so viele neue Gesichtspunkte zu schaffen, die mit dem beschränkten Felde der Ebene und den auf sie bezüglichen Theorien nicht von selbst erscheinen, dass es schon darum nützlich ist, vorher einige besondere Klassen zu betrachten. Das wird noch nützlicher dadurch, dass diese Klassen in der allgemeinen Theorie als Bestandtheil erscheinen und hiemit also nur ein Stück ohnehin unumgänglicher Arbeit anticipirt ist. So weiss man, dass in der Ebene die birationalen Transformationen die Eigenschaft haben, sich aus elementaren Transformationen 2. Ordnung, Q^2 , zusammensetzen zu lassen. Wie ich schon früher hervorgehoben, kann Q^2 entweder durch die $(SC)^2$ oder durch die cubische Reciprokaltransformation $x_i x'_i = c$ auf den R_3 (und später auf R_r) verallgemeinert werden, weshalb sich beim Eingange in die Theorie der Periodicität jene Transformationen darbieten, welche entweder nur aus $(SC)^2$ oder nur aus Reciprokaltransformationen zusammengesetzt sind. Die ersteren habe ich im American Journal of Mathematics 1896 abgethan,¹ die anderen, von welchen ich hier handle,

¹ Theorie derjenigen Transformationen im R_r , welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen. Vol. 18.

sind dadurch von erhöhtem Interesse, dass sie die im Titel genannte Eigenschaft besitzen (§ 3).¹

Ich erledige diese Classe von Transformationen mit Bezug auf ihre periodischen Charakteristiken und deren Construction sowie auf ihre endlichen Gruppen und deren Construction.² Vorher gebe ich im I. Theile die allgemeinen Eigenschaften ihrer Fundamentalsysteme, welche bisher überhaupt nicht in Rede kamen.³

Es besteht eine noch allgemeinere *gleichartige* Theorie im R_r , von welcher sich zeigen wird, dass sie die ganze Theorie der ebenen birationalen Transformationen als speciellen Fall enthält.

I. THEIL.

Die Theorie der Fundamentalsysteme.

§ 1. *Eigenschaften der Fundamentalsysteme, welche durch Zusammensetzung von Reciprokaltransformationen entstehen.*

Es soll der Vereinfachung der Sprechweise wegen die Voraussetzung gemacht werden, dass wenn S_1, S_2 Fundamentalsysteme der einen, S'_1, S'_2 jene der 2. Transformation sind, niemals eine Fundamentalcurve 2. Art von S_2 mit einer von S'_1 coincidire, ohne dass die sie bestimmenden Fundamentalpunkte von S_2 mit jenen von S'_1 coincidiren. Ferner soll bei der Zusammensetzung niemals eine Fundamentalcurve von S_2 mit einem Fundamentalpunkte von S'_1 incident sein.

¹ Es ist ferner eine besondere Absicht dieser Arbeit, zum ersten Male auf den Vortheil hinzuweisen, den es bietet, statt der homaloidalen Flächensysteme die homaloidalen Curvensysteme auch im R_r zur Definition einer Transformation zu verwenden.

² Die Arbeit schliesst sich also auch an mein Buch: *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene* (Berlin, Mayer & Müller, 1895) an.

³ Es möge bemerkt sein, dass die Reciprokaltransformation allein als »p-reciproke Transformation« bei S. LIE in einer kurzen Note der Göttinger Nachrichten (1871) zu elementareren Zwecken angewendet vorkommt.

Theorem I. *Ein Fundamentalsystem, das nur durch Wiederholung oder Zusammensetzung mehrerer $(a_i, b_i)^3$ entsteht, besitzt keine Fundamentalcurven 1. Art.*

Eine solche Transformation S entspreche dem Satze und werde mit $(a_i, b_i)^3$ zusammengesetzt zu SS' . Das Fundamentalsystem von SS' ist unter dem transformirten Fundamentalsysteme S'_2 und unter b_i zu suchen. Einer Fundamentalcurve von $(SS')_2$ entspricht also in S'_1 entweder eine Fundamentalcurve c'_1 von S'_1 oder eine von S'_2 und dieser entspricht in $(SS')_1$ bezüglich eine gewöhnliche Curve von S_1 oder eine Fundamentalcurve von S_1 . In beiden Fällen ist die Curve von $(SS')_2$ eine Fundamentalcurve 2. Art.

Anmerkung. Wenn jedoch c'_1 durch einen Fundamentalpunkt b von S'_2 hindurchgeht, dann entspricht wohl der c'_2 eine Fundamentalcurve und gleichzeitig die dem b entsprechende Fundamentalfläche A , aber dies ist eigentlich so aufzufassen, dass sich die homaloidalen Flächen von S'_2 längs c'_2 berühren und dass der c'_2 eigentlich die Curve c_1 , den ∞^1 Strahlbüscheln von Nachbarpunkten an c'_2 (längs den homaloidalen Flächen) die A entspricht. A bildet also eine Absonderungsfläche nur für jene Flächen des Raumes mit S'_2 , welche längs der Curve c'_2 alle homaloidalen Flächen berühren. Die erste der gemachten Einschränkungen bedeutet also doch nur, dass homaloidale Flächensysteme mit Berührung längs Curven (bei variabler Berührungsebene) ausgeschlossen sind.

Theorem II. *Die homaloidalen Systeme dieser Transformationen haben nur solche Fundamentalcurven gemeinsam, welche eine nothwendige Folge der Vielfachheiten in den Fundamentalpunkten sind.*

Gilt das Theorem für S , so gilt es auch für $S.(a, b)^3$, denn die Kanten $b_i b_k$ sind nothwendig durch die Punkte b_i gemäss meiner Abhandlung über die $(a_i, b_i)^3$ und würde es für eine der übrigen Fundamentalcurven behufs des Enthaltenseins einer weiteren Bedingung bedürfen, welche ausserhalb der b_i und der transformirten Fundamentalpunkte sich befindet, so würde dies auch auf S sich übertragen. Für $(a, b)^3$ gilt aber das Theorem, also auch für S .

Theorem III. *Die Verwandlung von Ordnung und Singularitäten der M_2 geschieht nach der linearen Substitution*

so gilt es auch für die Composition, weil der 1. Coefficient aus einem Producte zweier ungerader Zahlen durch Addition gerader Producte entsteht, und analog die Coefficienten a_i oder b_i . Für die Reciprokaltransformationen gilt es aber ersichtlich.

Theorem V. Die unvollständigen Substitutionen 1) reproduciren die Formen

$$(1) \quad 2n^2 - \sum_1^{\sigma} x_i^2,$$

$$(2) \quad 4n - \sum_1^{\sigma} x_i,^1$$

sind also stets Hermite'sche Substitutionen.

Denn die componirenden Transformationen $(a_i, b_i)^3$ reproduciren dieselben, indem man nur jedesmal die $\sigma - 4$ Punkte, welche nicht Fundamentalpunkte sind, als gewöhnliche Punkte transformirt voraussetzt, und folglich auch das Gesamtergebn.

Theorem VI. Die vollständigen Substitutionen 1) reproduciren die Formen

$$(3) \quad n^3 - \sum_1^{\sigma} x_i^3 + \sum y_{ik}^3,$$

$$11n - 2 \sum_1^{\sigma} x_i - \sum y_{ik}.$$

Hier ist die 2. Summe über alle Fundamentalcuren des Fundamentalsystems erstreckt. Die componirenden $(a_i, b_i)^3$ reproduciren (3) und da die Fundamentalcuren von 1) sich aus denen der Elemente oder ihren Transformirten zusammensetzen, so bleiben die (3) invariant.

Theorem VII. Die Substitutionen 1) lassen den Singularitätencomplex $n=4s$, $x_1 = \dots = x_{\sigma} = 2s$ und aber auch $n=2s$, $x_1 = \dots = x_{\sigma} = s$ ungeändert.

Denn man kann sich die componirenden $(a_i, b_i)^3$ mit ihren Fundamentalsystemen in dieselbe M_2^2 verlegt denken, welche durch die einzelnen, also auch durch die Gesamttransformation invariant bleiben wird.

¹ Schon in der Ebene können die beiden bekannten Gleichungen durch Zusammensetzung aus den Q^2 bewiesen werden. ... Bezüglich (3) cf. die Note 1) am Ende der Abhandlung.

Corollar. In den Substitutionen 1) gelten die Relationen

$$2d_i = a_{11}^{(i)} + a_{12}^{(i)} + \dots + a_{1\sigma}^{(i)}.$$

Denn eine M_2^2 , welche die y_{ik} Null hat, muss auch die y'_{ik} Null liefern.

Theorem VIII. Wenn ein Fundamentalpunkt $2a$ -fach für die homaloidalen Flächen ist, entspricht ihm im anderen Raume eine Absonderungsfläche der Ordnung a .

Es möge für eine Transformation S gelten. Wird S mit $(a, b)^2$ zusammengesetzt, so erhält man für die Fundamentalpunkte, welche Transformirte aus S_2 sind, dieselbe Vielfachheit und dieselbe Ordnung der Absonderungsfläche wie für S , für $b_1 b_2 b_3 b_4$ aber erhält man nach 1) $x'_i = 2n - x_k - x_l - x_m$ für die Vielfachheit und, da die Ebene $a_k b_l a_m$ in eine Fläche der Ordnung $n - \frac{x_k}{2} - \frac{x_l}{2} - \frac{x_m}{2}$ transformirt wird (da das Theorem für S gelten soll), ist dies die Ordnung der Absonderungsfläche, welche Zahl wirklich die Hälfte von x'_i ist.

Theorem IX. Die Transformationen haben stets in beiden Räumen gleich hohe Ordnung.

Das Theorem gelte für S und werde S mit $(a_i, b_i)^3$ zusammengesetzt. Dann entsteht $n' = 3n - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ in S'_2 und aber in S_1 entsteht durch Umsetzung von $M_2^3(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2)$ unter Voraussetzung der Giltigkeit von V. die Ordnung $3n - 2\frac{x_2}{2} - 2\frac{x_3}{2} - 2\frac{x_4}{2}$ also n' .

Theorem X. Die Transformationen haben stets in beiden Räumen gleich viele Fundamentalpunkte.

Durch Zusammensetzung mit $S' = (a_i, b_i)^3$ entsteht eine Transformation, welche die Transformirten der Fundamentalpunkte von S_2 und die diesen conjugirten in S_1 (welche nicht zu a_i -Punkten gehören) zu Fundamentalpunkten hat, was gleiche Anzahlen sind; ferner entweder 4 weitere Fundamentalpunkte in $(SS')_1$ und $(SS')_2$ oder es geht in $(SS')_2$ ein Fundamentalpunkt dadurch verloren, dass $x_k + x_l + x_m = 2n$ ist. Dann ist aber auch der Transformirte von a_i aus S_2 nach S_1 kein Fundamentalpunkt, sodass thatsächlich die Anzahl dieselbe bleibt.

Theorem XI. *Die Anzahl der Fundamentaleurven 2. Art ist mindestens $\frac{3}{2}(\sigma - 1)$, wenn σ die Anzahl der Fundamentalpunkte ist.*

Gilt das Theorem für S und wird mit $(a_i, b_i)^3$ componirt, so entstehen resp. $\sigma + 1, \sigma + 2, \sigma + 3, \sigma + 4$ Fundamentalpunkte und aber die Anzahl der Fundamentaleurven wächst resp. um 3 oder 6.

Theorem XII. *Die Anzahlen der Fundamentaleurven sind in beiden Räumen dieselben.*

Wird S mit $S' = (a, b)^3$ zusammengesetzt, so erhält man 1, 2, 3, 4 Fundamentalpunkte mehr und eine Fundamentaleurve geht jedesmal nur dann verloren, wenn sie mit einer Kante des Tetraeders, $a_i a_k$, übereinstimmt.

Das Theorem folgt übrigens auch daraus, dass eben jede Fundamentaleurve einer bestimmten anderen entspricht und wenn zwei unendlich nahe rücken, auch die entsprechenden unendlich nahe rücken.

Theorem XIII. *Die Ordnungen der Fundamentaleurven von R_3 sind gleich den Vielfachheiten der Fundamentaleurven von R'_3 ,¹ ihre Summe ist $3(m - 1)$.*

Dieses Theorem ist algebraischer Natur. Wenn eine Ebene eine Fundamentaleurve in k Punkten schneidet, so geht die homaloidale Fläche k -fach durch die entsprechende Fundamentaleurve hindurch.

Theorem XIV. *Die Summe der Ordnungen der σ Absonderungsflächen ist $2(m - 1)$ und die Summe ihrer Quadrate ist $\frac{m^2 - 1}{2}$.*

Die ersten Coefficienten der $\sigma + 1$ ersten Zeilen in 1) sind die Ordnung m und die doppelten Ordnungen der Absonderungsflächen und durch Einsetzung der unvollständigen I) in die Formen (2) entsteht das Theorem.

Theorem XV. *Die Summe der Vielfachheiten einer und derselben Fundamentalfäche in allen σ Fundamentalpunkten ist $\sum a_i - 1$ und die Summe ihrer Quadrate ist $2\sum a_i^2 + 1$.*

¹ Corollar. Auch die Fundamentalfächen haben die Eigenschaft, nur solche Fundamentaleurven zu enthalten, welche eine nothwendige Folge ihrer singulären Punkte sind.

Dem die Coefficienten in der i . Colonne von 1) sind Ordnung und Vielfachheiten einer Fundamentalfläche und die Einsetzung in (2) lehrt das Theorem. Ein 2. Beweis wird wie bei vorhergehenden Theoremen durch die Zusammensetzung aus $(a_i, b_i)^3$ geliefert.

Theorem XVI. *Die Summe der Vielfachheiten, mit welchen alle vorhandenen Fundamentalflächen durch einen und denselben a_i -fachen Fundamentalpunkt gehen, ist $2a_i - 1$ und die Summe ihrer Quadrate ist $\frac{a_i^2}{2} + 1$.*

Es gelte für S . Wird mit $S' = (a, b)^3$ componirt, so bleiben nur die Glieder für diejenigen Fundamentalflächen, in deren zugeordnete Fundamentalpunkte kein a fällt, bestehen, diese sowie die anderen sind aber als $2a_i - x_k - x_l - x_m$ auszudrücken, daher die Summe $2\Sigma a - \Sigma x_k - \Sigma x_l - \Sigma x_m$, und da Σa nach Voraussetzung von XIV $2(m - 1)$, so folgt

$$4(m - 1) - \Sigma x_k - \Sigma x_l - \Sigma x_m$$

und wieder wegen Voraussetzung

$$4(m - 1) - 2X_k - 2X_l - 2X_m + 3 = 4m - 2X_k - 2X_l - 2X_m - 1.$$

Die Vielfachheit der transformirten homaloidalen Flächen im Punkte b_i ist $2m - X_k - X_l - X_m$, so dass das Theorem wirklich $4m - 2X_k - 2X_l - 2X_m - 1$ verlangt.

Die Summe der Quadrate der transformirten Vielfachheiten ist

$$\begin{aligned} \Sigma(2a - x_k - x_l - x_m)^2 &= 4\Sigma a^2 - 4\Sigma ax_k - 4\Sigma ax_l - 4\Sigma ax_m + \Sigma x_k^2 + \Sigma x_l^2 + \Sigma x_m^2 \\ &= 2(m^2 - 1) + \frac{X_k^2 + 1}{2} + \frac{X_l^2 + 1}{2} + \frac{X_m^2 + 1}{2} - 4\Sigma ax_k - 4\Sigma ax_l - 4\Sigma ax_m \end{aligned}$$

wegen Voraussetzung des Theoremes für S . Für Σax_l wird in XVII der Werth $\frac{1}{2}mX_k$ bewiesen, also kommt

$$2(m^2 - 1) + \frac{X_k^2 + X_l^2 + X_m^2 + 3}{2} - 2m(X_k + X_l + X_m).$$

Nun ist das Quadrat der transformirten Vielfachheit $(2m - X_k - X_l - X_m)^2$ und das Theorem verlangt also, dass $[(2m - X_k - X_l - X_m)^2 - 1] : 2$ der vorigen Summe gleich sei, was der Fall ist.

Theorem XVII. Die Summe der Producte aus den Ordnungen der Fundamentalflächen in ihre Vielfachheit, mit welcher sie durch einen festen Fundamentalpunkt gehen, über alle Fundamentalflächen erstreckt, ist $\frac{1}{2} m X_i$, wenn X_i die Vielfachheit der homaloidalen Flächen im Punkte ist.

Es gelte für S . Wird mit $S' = (a, b)^3$ componirt, so wird die transformirte Summe sein

$$\Sigma(3a_i - x_i - x_k - x_l - x_m)y_{hk} = 3\Sigma a_i y_{hk} - \Sigma x_i y_{hk} - \Sigma x_k y_{hk} - \Sigma x_l y_{hk} - \Sigma x_m y_{hk},$$

wenn die Durchgänge y sich auf einen Fundamentalpunkt beziehen, in den kein Punkt a_i verlegt wird. Nun ist wegen S die $\Sigma a_i y_{hk} = \frac{1}{2} m Y_k$ und wegen XVIII das übrige gleich $-\frac{1}{2}(\Sigma X_i Y_k + \Sigma X_k Y_k + \Sigma X_l Y_k + \Sigma X_m Y_k)$ aber es ist der Werth des Theorems für das transformirte System gleich $(3m - X_i - X_k - X_l - X_m)Y_k$, sodass die Richtigkeit in die Augen fällt.

Theorem XVIII. Für zwei feste Fundamentalpunkte ist die Summe der Producte der Vielfachheiten in ihnen, erstreckt über alle Fundamentalflächen, gleich $\frac{1}{2} X_i Y_k$, wo X_i, Y_k die Vielfachheiten der homaloidalen Flächen in diesen beiden Punkten sind.

Es gelte für S . Wird mit $S' = (a, b)^3$ componirt, so ist die transformirte Summe $\Sigma(2a_p - x_k - x_l - x_m)(2a_p - y_i - y_l - y_m)$ und also wegen Voraussetzung und wegen XIV gleich $2(m^2 - 1) - m(X_k + X_l + X_m) - m(Y_i + Y_l + Y_m) + \frac{1}{2}(X_k + X_l + X_m)(Y_i + Y_l + Y_m) + 2$ während der transformirte Werth des Theorems ist $\frac{1}{2}(2m - X_k - X_l - X_m)(2m - Y_k - Y_l - Y_m)$, was mit dem vorigen Werthe übereinstimmt. Dies, wenn beide Punkte mit Punkten a_i coincidiren. Wenn nur ein Punkt der beiden genannten mit a_i coincidirt, so ist die transformirte Summe vom Werthe $\Sigma(2a_p - x_k - x_l - x_m)y_q$ und y_q hat denselben Werth wie für S_2 , die Ausrechnung beweist auch hier das Theorem. Stimmt keiner der zwei Fundamentalpunkte mit a_i überein, so ändert sich die Summe für S gar nicht.

Theorem XIX. *Die Summe der Vielfachheiten einer homaloidalen Fläche in allen Fundamentalcurven 2. Art oder auch die Summe der Ordnungen aller Fundamentalcurven 2. Art ist $3(m-1)$.*

Die Form (3) muss durch die Substitutionen 1) ungeändert bleiben. Der Coefficient von n ist $11(m-1) - 2\sum b_i - \sum b_{ik}$ der wegen XIV $3(m-1) - \sum b_{ik}$, muss aber wegen der Invarianz Null sein.

Theorem XX. *Die Summe der Cuben der Zahlen aus XIX weniger der Summe der Cuben der Vielfachheiten, welche die homaloidalen Flächen in den Fundamentalpunkten haben, ist $1-n^3$.*

Der Beweis wird durch Einsetzung in (3) geliefert.

Theorem XXI. *Die Summe der Vielfachheiten einer Fundamentalfläche a_i . Ordnung in den Fundamentalcurven, durch welche sie hindurchgeht ist $3a_i$.*¹

Es gelte für S . $(a,b)^3$ liefert dann Ordnung $(3a-x_1-x_2-x_3-x_4)$ der Fundamentalfläche. Die Summe der freien Curven bleibt $3a$, die Summe der 6 Kanten liefert $(a-x_1-x_2) + \dots + (a-x_3-x_4) = 6a - 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4$, also die ganze Summe $9a - 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4$, was gleich dem Dreifachen der neuen Ordnung ist.

Theorem XXII. *Die Summe der Vielfachheiten, mit welchen alle vorhandenen Fundamentalcurven durch einen bestimmten Fundamentalpunkt hindurchgehen, ist $3a_i$, wenn $2a_i$ die Vielfachheit des Fundamentalpunktes ist.*

Dies ist eine Folge von XXI. Denn wenn eine Fundamentalcurve c durch einen Fundamentalpunkt a_{ik} -fach geht, so enthält die dem Punkte entsprechende Fundamentalfläche die der c entsprechende Fundamentalcurve c' in der Vielfachheit a_{ik} .

Theorem XXIII. *Die Summe der Vielfachheiten, mit welchen eine bestimmte Fundamentalcurve ν . Ordnung durch die Fundamentalpunkte hindurchgeht, welche sie enthält, ist 2ν .*

¹ Die Summe der Ordnungen der Fundamentaleurven, durch welche eine Fundamentalfläche hindurchgeht, hängt nicht allein von der Ordnung a_i ab. Ebenso die Summe der homaloidalen Vielfachheiten aller vorhandenen Fundamentaleurven, welche durch einen bestimmten Fundamentalpunkt hindurchgehen.

Es gelte für S . Die Zusammensetzung mit $S' = (a, b)^3$ gibt die Ordnung $\nu' = 3\nu - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ der Fundamentaleurve und dieselben Vielfachheiten in den freien Fundamentalpunkten, in den neuen aber $\nu - x_k - x_l - x_m$, daher die Gesamtsumme wegen Voraussetzung $2\nu - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + (\nu - x_1 - x_2 - x_3) + (\nu - x_1 - x_2 - x_4) + (\nu - x_2 - x_3 - x_4) = 6\nu - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4$ was $2\nu'$ ist.

Theorem XXIV. Die Summe der Quadrate der Vielfachheiten, mit welchen eine bestimmte Fundamentaleurve ν . Ordnung durch die Fundamentalpunkte hindurchgeht, ist $\frac{\nu^2 + 3}{2}$.

Die Summe der Quadrate der freien Fundamentalpunkte ist

$$\frac{\nu^2 + 3}{2} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

die Summe der neuen ist

$$\sum_1^4 (\nu - x_k - x_l - x_m)^2 = 4\nu^2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 6\nu(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

und also die Gesamtsumme $\frac{9\nu^2 + 3}{2} + 2\Sigma x^2 - 6\nu\Sigma x$, während

$$\nu'^2 = (3\nu - 2\Sigma x)^2 \text{ ist.}$$

Theorem XXV. Die Summe der Vielfachheiten, mit welchen alle Fundamentalflächen durch eine bestimmte Fundamentaleurve der homaloidalen Vielfachheit ν hindurchgehen, ist 2ν , die Quadratsumme $\frac{\nu^2 + 3}{2}$.¹

Das Theorem ist eine Folge von XXIII und XXIV mittelst Umsetzung in den zweiten Raum.

Definition. Ich bezeichne als homaloidale Curven das System der Curven, welche den Geraden des R_3 durch die Transformation entsprechen. Sie gehen durch die Fundamentalpunkte mit den halben Vielfachheiten von deren homaloidalen Vielfachheiten.²

¹ Über die Summe der homaloidalen Vielfachheiten aller Fundamentalpunkte, welche in einer bestimmten Fundamentaleurve enthalten sind, lässt sich kein Theorem geben.

² Man sollte eigentlich von zweierlei homaloidalen Vielfachheiten der Fundamentalpunkte sprechen, nämlich der für die M_2 und der für die M_1 .

Theorem XXIX. *Die unvollständigen Substitutionen II) lassen ungeändert die Formen*

$$(4) \quad n^2 - 2 \sum \eta^2,$$

$$(5) \quad 2n - \sum \eta$$

(sind also *Hermite'sche Substitutionen*), sowie die *Singularitätencomplexe* $n = 4s$, $\eta_1 = \dots = \eta_\sigma = s$ oder $n = 6s$, $\eta_{ik} = 2s$ oder $n = 10s$, $\eta_i = s$, $\eta_i = 2s$.

Unter unvollständigen Substitutionen II sind jene verstanden, welche durch Weglassung der η in den ersten $\sigma + 1$ Zeilen und der letzten σ' Zeilen entstehen, was widerspruchsfrei geschehen kann. Der Beweis des Theoremes geschieht dann durch Zusammensetzung aus den elementaren $(a, b)^3$, indem auch diese Substitutionen II sich genau entsprechend den Transformationen zusammensetzen, wenn immer für jeden neuen Fundamentalpunkt eine neue Variable eingeführt wird. Für $(a, b)^3$ ist das Theorem bewiesen worden. Für $n = 6s$, $\eta_{ik} = 2s$ ist die Invarianz auch direct leicht beweisbar. Trifft nämlich eine Curve eine Fundamentaleurve 2 mal, so sondert sich die conjugirte ab und die entsprechende Curve trifft überdies diese zweimal, trifft sie alle, so sondert sich $6(n - 1)$ ab.

Theorem XXX. *Wenn eine Transformation ein Flächensystem n, x_1, \dots, x_σ in sich transformirt, transformirt sie auch das Flächensystem $n - 4, x_1 - 1, \dots, x_\sigma - 1$ in sich und wenn sie ein Curvensystem $n, \eta_1, \dots, \eta_\sigma, \eta_1, \dots, \eta_\sigma$ in sich transformirt, transformirt sie auch das Curvensystem $n - 10, \eta_1 - 1, \dots, \eta_\sigma - 1, \eta_1 - 2, \dots, \eta_\sigma - 2$ in sich.*

Folgt aus der Transformation eines linearen Polynomes in ein solches durch I. und II. und aus XXIX. Das Theorem ist hier rein arithmetisch; es ist nur aus der Definition von I) und II) als linearer Substitutionen, welche durch Zusammensetzung der elementaren Substitutionen für $(a, b)^3$ entstehen, gewonnen.

Theorem XXXI. *Die Form*

$$(6) \quad \frac{1}{6} [(n + 1)(n + 2)(n + 3) - 1 - \sum x(x + 1)(x + 2) + \sum y(y^2 - 1)]$$

bleibt ungeändert durch die Transformation mit den Substitutionen I.

Diese Form lässt sich nämlich direct aus den Formen (2) und (3) linear zusammensetzen. Mit Hilfe von XIV., XV., XIX. wird bewiesen, dass diese Form (6) für die homaloidalen Flächen den Werth 3 annimmt und sie drückt wirklich für die Flächen die Dimension gemäss der allgemeinen Formel aus.¹ Ebenso lehrt (6), dass für eine Fundamentalfläche die Dimension Null ist, u. zw. auf Grund dessen, dass auch sie nur Fundamentalcurven als nothwendige enthält.

Theorem XXXII. Die Form $nn - \sum_1^{\sigma} x\mathfrak{x} - \sum_1^{\sigma} y\mathfrak{y}$ bleibt ungeändert, wenn man auf die zwei Variablenreihen bezüglich die Substitutionen I), II) anwendet.

Diese Form drückt die Zahl der freien Schnittpunkte einer Fläche des Systemes $n, x_1, \dots, x_{\sigma}, y_1, \dots, y_{\sigma}$ mit einer Curve des Systemes $n, \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_{\sigma}, \mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_{\sigma}$ aus.

Theorem XXXIII. Die Substitutionen I) lassen auch ungeändert die Form

$$\frac{1}{6} \left[(n+1)(n+2)(n+3) - \sum y_i(y_i+1)[3n-2y_i+5]\nu_i - \frac{1}{2}(2y_i+1)\rho_i \right] \\ \sum x_i(x_i+1)(x_i+2) + \sum y_i(y_i+1)(3x_k-2y_i+2)a_{ik}.$$

Hier bezeichnen ν_i, ρ_i Ordnung und Classe einer Fundamentalcurve und a_{ik} die Vielfachheit, mit welcher sie durch den mit x_k bezeichneten Fundamentalpunkt hindurchgeht. Die Form ist jene, welche NÖTHER Ann. di Mat., Ser. 2^a, Tome V. für die Dimension eines Flächensystemes mit singulären Punkten und Curven ausspricht.²

¹ NÖTHER, *Sulle curve multiple delle superficie algebriche*. Ann. di Mat., S. 2^a. T. 5.

² Die Substitutionen I) lassen auch die trilineare Form ungeändert, welche die Anzahl der Schnittpunkte von drei Flächen $n, x, y; n', x', y'; n'', x'', y''$ ausdrückt. Sie ist eigentlich quadrilinear, da die ν_i selbst auch transformirt werden müssen (die ν_i sind die m_i in NÖTHER's Formel). Aus jener entsteht eine invariante cubische Form mit einer Variablenreihe, indem $n = n' = n'', x = x' = x'', y = y' = y''$ gesetzt wird, der Rang des Flächensystems n, x, y .

Ich muss aber hervorheben, dass in dieser ganzen Arbeit von *keinem einzigen* der Nöther'schen Resultate Verwendung geschieht; denn XXXI. leitet sich ohne sie her und XXXIII. habe ich nur der Vollständigkeit wegen für den Leser hingeschrieben.

Ja, wegen ihrer beschränkten Giltigkeit ist ihre Anwendbarkeit vielleicht unmöglich.

Theorem XXXIV. *Die vollständigen wie unvollständigen linearen Substitutionen I., II. haben die Determinante = 1.*

Auch dieses folgt aus der Zusammensetzung der Transformationen durch elementare cubische Reciprokaltransformationen.

Theorem XXXV. *Vermindert man die Vielfachheit a_k einer Fundamentalfäche A_i Ordnung A_i im Punkte a_k um 1, so wird die neue Fläche in eine Fläche a_k Ordnung transformirt, welche aus A_k durch Verminderung der Vielfachheit in a'_i um 1 entsteht.*

Die Curven in A bilden ein homaloidales System mit den in A enthaltenen Fundamentalpunkten als in derselben Vielfachheit genommenen Punkten, welche sie für die A besitzen und sind entstanden durch den Schnitt mit den um die Fundamentalfäche A verminderten homaloidalen Flächen, welche nämlich den Ebenen durch a entsprechen. Als Fundamentaleurven fungiren auf A die in A enthaltenen Fundamentaleurven der Transformation.

Die ebenen Schnitte der Fundamentalfächen sind von variablem Geschlechte und es sind also auch die Osculationskegel der homaloidalen Flächen in den Fundamentalpunkten von variablem Geschlechte.

Theorem XXXVI. *Wenn eine Fundamentalfäche A_i a_i Ordnung durch einen Fundamentalpunkt x_k a_{ik} -fach hindurchgeht, so geht die dem x_k entsprechende Fläche A'_k durch den Punkt x'_i ebenfalls a_{ik} -fach.*

Die Nachbarpunkte im Osculationskegel von A_i im x_k entsprechen den Nachbarpunkten von x_i im Osculationskegel von A_k und dieses Entsprechen ist collinear.

Es gelten noch die folgenden Theoreme:

Theorem XXXVII. *Wenn eine Fundamentalfäche durch zwei Fundamentalpunkte der Ordnungen a_i und a_k , wo $a_i > a_k$, mit den Vielfachheiten a_{i1} und a_{k1} geht, so ist $a_{i1} > a_{k1}$.*

Theorem XXXVIII. *Wenn eine Fundamentalcurre durch zwei Fundamentalpunkte der Ordnungen a_i und a_k , wo $a_i > a_k$, mit den Vielfachheiten ν_{i1} , ν_{k1} geht, so ist $\nu_{i1} > \nu_{k1}$.*

Theorem XXXIX. Wenn durch denselben Fundamentalpunkt zwei Fundamentalflächen der Ordnungen a_i, a_k , wo $a_i > a_k$, mit den Vielfachheiten a_{1i}, a_{1k} gehen, so ist $a_{1i} > a_{1k}$.

Theorem XL. Wenn durch denselben Fundamentalpunkt zwei Fundamentalcurven der Vielfachheiten ν_i, ν_k gehen, wo $\nu_i > \nu_k$, mit den Vielfachheiten ν_{1i}, ν_{1k} , so ist $\nu_{1i} > \nu_{1k}$.

Theorem XLI. Wenn für 4 Fundamentalpunkte die Summe der Ordnungen $a_i + a_k + a_l + a_m \geq 2m$, so ist auch für jede Fundamentalfläche a Ordnung, welche durch sie mit den Vielfachheiten $a_{1i}, a_{1k}, a_{1l}, a_{1m}$ geht, $a_{1i} + a_{1k} + a_{1l} + a_{1m} \geq 2a$.

Theorem XLII. In den Theoremen XXXVII. bis XL. ist überdies stets $a_i - a_{1i} \geq a_k - a_{1k}$, $\nu_i - \nu_{1i} \geq \nu_k - \nu_{1k}$, $a_i - a_{1k} \geq a_k - a_{1i}$, $\nu_i - \nu_{1k} \geq \nu_k - \nu_{1i}$.

Theorem XLIII. Die Fundamentalpunkte theilen sich in jedem der beiden Räume in Grüppchen gleicher Vielfachheit und die in diesen Grüppchen enthaltenen Anzahlen von Punkten sind in beiden Räumen dieselben.

Theorem XLIV. Jedes Grüppchen des einen Raumes entspricht einem bestimmten Grüppchen des anderen Raumes, so nämlich, dass die Absonderungsfläche eines Fundamentalpunktes in dem Grüppchen in allen Fundamentalpunkten des correspondirenden Grüppchens gleiche Vielfachheiten besitzt mit Ausnahme eines einzigen Fundamentalpunktes.

Theorem XLV. Die Differenz unter den beiden im vorigen Theoreme genannten Vielfachheiten ist $= \pm 1$.

Die letzten 3 Theoreme können durch Zusammensetzung aus elementaren $(a, b)^3$ bewiesen werden.

§ 2. Eigenschaften der Fundamentalsysteme ohne Fundamentalcurven 1. Art.

Theorem XLVI. Werden zwei solche Transformationen S, S' zusammengesetzt, so erhält man eine Transformation derselben Definition.

Das Fundamentalsystem $(SS')_2$ setzt sich aus den durch S' transformirten freien Fundamentalgebilden von S in S_2 und aus den Fundamentalgebilden von S'_2 zusammen, enthält also nur Fundamentalcurven 2. Art. Nur wenn eine Fundamentalcurve von S_2 mit einem Fundamen-

talpunkte von S'_1 coincidirt, kann der Curve eine Fläche entsprechen, aber dies ist doch immer so, dass der Curve eigentlich eine Curve und nur der gleichzeitigen Berührung der Flächen längs jener Curve die Fundamentalfläche entspricht.

Diese Transformationen bilden also eine in sich geschlossene unendliche Gruppe.

Theorem XLVII. *Die Anzahl der Fundamentalpunkte ist in beiden Räumen dieselbe.*

Die Postulation der Ein-Eindeutigkeit reicht zum Beweise hin. Denn in Folge deren müssen lineare Substitutionen unter den Ordnungen n und Vielfachheiten x in den Fundamentalpunkten bestehen, welche dieselben in beiderlei Sinne ohne Unbestimmtheit finden lassen, wozu die Gleichheit der Variabelnzahl in beiden Räumen Bedingung ist.

Theorem XLVIII. *Für die Transformationen gilt $mm' - 1 = \sum a_i A_i = \sum a'_i A'_i$, wenn m, m' die beiden Ordnungen, a_i, a'_i die Vielfachheiten der Fundamentalpunkte in R_3, R'_3 , A_i, A'_i die Ordnungen der entsprechenden Fundamentalflächen sind.*

Ein Ebenenbüschel in R_3 und das entsprechende Flächenbüschel in R'_3 liefern (die Coincidenz von R_3, R'_3 zeitweilig vorausgesetzt) eine Fläche $(m' + 1)$. Ordnung, Ort der Punkte, die mit ihren Transformirten Gerade über die Axe des Büschels liefern. Die Fläche geht a'_i -fach durch die Fundamentalpunkte von R'_3 und transformirt sich in die analoge Fläche des R_3 , sodass besteht $(m' + 1)m - \sum a'_i A'_i = m + 1$.

Corollar. Die homaloidalen Curven im R_3 gehen A_i -fach durch die a_i -fachen Fundamentalpunkte und treffen die Fundamentaleurven nicht in variablen Punkten.

Theorem XLIX. *Eine Fläche 4. O., welche in allen Fundamentalpunkten von R_3 Doppelpunkte hätte, würde in eine eben solche Fläche des R'_3 verwandelt werden.*

Die Jacobi'sche Fläche hat die Ordnung $4(n - 1)$ und es ist also $2\Sigma A'_i = 4(n - 1)$, $2\Sigma A_i = 4(n' - 1)$, weil die einem Fundamentalpunkte entsprechende Fläche bekanntlich zweimal zählt. Also $\Sigma A_i = 2(n' - 1)$, und $4n' - 2\Sigma A_i = 4$.

Corollar. Eine Fläche 2. Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte von R_3 einfach geht, wird in eine eben solche Fläche des R'_3 verwandelt.

Theorem L. *Die Transformation muss in beiden Systemen von gleicher Ordnung sein.*

Ich benütze das vorstehende Corollar und denke mir eine Fläche 2. Ordnung durch alle Fundamentalpunkte.¹ Unter den Punkten der beiden so einander entsprechenden M_2^2 entsteht dann eine birationale Verwandtschaft, in welcher den ebenen Schnitten die Schnitte mit den homaloidalen Flächen entsprechen. Diese Verwandtschaft muss, da sie stereographisch auf die Ebene projicirt werden kann, in beiden Systemen gleicher Ordnung sein, also auch die beiderseitigen homaloidalen Flächen, $n = n'$.

Theorem LI. *Einem k -fachen Fundamentalpunkte entspricht eine Absonderungsfläche der Ordnung $\frac{k}{2}$; alle Fundamentalpunkte haben also gerade Vielfachheit.*

Denn der Fundamentalpunkt wird auch k -fach für die Verwandtschaft unter den Punkten der M_2^2 und in dieser entspricht ihm eine Curve derselben Ordnung k . Diese Curve ist aber der Schnitt von M_2^2 mit der zum Punkte gehörigen Absonderungsfläche im Raume und diese ist also von der Ordnung $\frac{k}{2}$.

Theorem LII. *Die Ordnung der Transformation ist stets ungerade und $\Sigma k^2 = 2(n^2 - 1)$.*

Denn nach XLVIII. $n^2 - 1 = 2\Sigma A_i^2$, also $n^2 = 2\Sigma A_i^2 + 1$.

Für jede birationale Transformation im R_3 gilt der Satz: Durch die Fundamentalcurven 2. Art gehen die homaloidalen Flächen stets nur in Folge der Fundamentalcurven 1. Art. Also gilt:

Theorem LIII. *Die Fundamentalcurven 2. Art sind Curven, welche durch die singulären Punkte allein vollständig bestimmt sind. Ebenso:*

¹ Das Gewagte dieses Beweises will ich nicht verhüllen. Man vergleiche hiezu die 1. Note auf p. 110 meines Buches über Gruppen, Mayer & Müller, Berlin 1895.

Theorem LIV. *Die homaloidalen Flächen sind Flächen, welche vermöge der singulären Punkte allein das Geschlecht $p=0$ haben und durch die Fundamentaleurven 2. Art nur mit solchen Vielfachheiten gehen, welche eine nothwendige Consequenz der Vielfachheiten in den Fundamentalpunkten sind.*

Theorem LV. *Die homaloidalen Curven sind rationale Curven, welche ihren rationalen Character sowie ihre Unbestimmtheit $u=4$ nur durch ihre Vielfachheit in den Fundamentalpunkten erhalten.*

Es ist überhaupt sowohl im R_3 als im R_r bei jeder einzelnen Transformation das grösste Gewicht darauf zu legen, auf welche Art die homaloidalen Curven ihren rationalen Character erhalten, ebenso die homaloidalen M_2, M_3, \dots, M_{r-1} .

Bekanntlich kann eine Curve im Raume singuläre Punkte annehmen, ohne dass sich die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte ändert. Ich möchte daher jeder Raumcurve eine gewisse primitive Curve zuweisen, welche gar keine vielfachen Punkte besitzt, aber dieselbe Anzahl scheinbarer Doppelpunkte und aus welcher also jene numerisch durch Aufnahme vielfacher Punkte entsteht. Ich schliesse nun in dem gegenwärtigen Falle das ausserordentlich wichtige Theorem, welches in der Anmerkung zu LXI. einen strengeren Beweis erfährt:

Theorem LVI. *Die homaloidalen Curven aller Transformationen gegenwärtiger Art sind solche Curven, welche ohne die Vielfachheiten in den Fundamentalpunkten das für Curven ihrer Ordnung überhaupt mögliche Maximalgeschlecht haben.*

Das heisst, ihre primitiven Curven sind Curven maximalen Geschlechtes. — Ich benütze jedoch LVI. und LVII. nirgends.

Theorem LVII. *Für die homaloidalen Curven gilt*

$$\sum \frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{2} = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2} - \left[\frac{\nu - 1}{2} \right]^2.$$

Hiebei ist $\left[\frac{\nu - 1}{2} \right]$ der ganze Quotient der Division $(\nu - 1):2$, und α_i sind die singulären Punkte der Curven, ν die Ordnung. In der That hat ein α_i -facher Punkt auch im R_r für das Geschlecht der Curve den Werth von $\frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{2}$ Doppelpunkten und nach einem Theoreme von

HALPHEN¹ ist $\left[\frac{\nu-1}{2}\right]^2$ die Maximalzahl von scheinbaren Doppelpunkten einer Curve ν . Ordnung, also jene Differenz das Maximalgeschlecht, welches nach LV., LVI. durch die a_i -fachen Punkte absorbiert werden muss.

Theorem LVIII. *Die Summe und die Summe der Quadrate der Vielfachheiten, mit welchen sämtliche vorhandenen Fundamentalflächen durch einen bestimmten $2a_i$ -fachen Fundamentalpunkt gehen, ist $4a_i - 1$ und $2a_i^2 + 1$.*

Ich verwende wieder die invariante Fläche 2. Ordnung und projicire die birationale Verwandtschaft in derselben stereographisch auf die Ebene. Dann erscheinen den $2a_i$ -fachen Fundamentalpunkten des R_3 entsprechend auch in der Ebene $2a_i$ -fache Fundamentalpunkte, hinzu treten noch die Schnittpunkte der Ebene mit den beiden Erzeugenden des Centrums als m -fache Fundamentalpunkte, während die Ordnung in der Ebene $2m$ wird. Es ist also nach den Gleichungen in der Ebene² $\Sigma a_{ik} + 2a_i = 3(2a_i) - 1$, wo die a_{ik} dieselben Durchgänge wie im R_3 , also die Zahlen des Theoremes sind, und weil die beiden hinzukommenden Fundamentalcurven durch jeden Punkt mit dessen halber Vielfachheit gehen.³

Für die Summe der Quadrate folgt ebenso $\Sigma a_{ik}^2 + 2a_i^2 = (2a_i)^2 + 1$, also $\Sigma a_{ik}^2 = 2a_i^2 + 1 = \frac{(2a_i)^2}{2} + 1$.⁴

¹ C. R. Bd. 70. — Das Theorem LVII., dessen von LVI. unabhängiger Beweis in der Anmerkung nach LXI. geliefert wird, steht ebenso wie LVI. mit einer Behauptung HALPHEN's über Raumcurven in n° 22 des Chap. II. seiner Preisschrift über die algebraischen Raumcurven (Journal de l'École polyt. Cah. LI.) in nur scheinbarem Widerspruche. Die betreffende Behauptung scheint mir übrigens *unrichtig*.

² Crelles Journal, Bd. 114, p. 57.

³ Diese Fundamentaleurven sind die stereographischen Projectionen der den beiden Erzeugenden in der Verwandtschaft auf M_2^2 entsprechender Curven m . Ordnung, welche nach der allgemeinen Theorie als homaloide Curven durch einen a_i -fachen Punkt A_i -fach gehen, also nach LI. $\frac{a_i}{2}$ -fach.

⁴ Das Gewagte des Beweises mittelst M_2^2 wird sehr gemildert, wenn man bedenkt, dass auch eine Fläche 4. O., welche doppelt durch die Fundamentalpunkte geht, dadurch abbildbar werden kann, dass sie einen 3-fachen Punkt erhält und allgemeiner, dass man für hinreichend grosses s stets wird eine Fläche der Ordnung $2s$ finden können, welche durch die sämtlichen Fundamentalpunkte s -fach geht und ausserhalb derselben einen $(2s - 1)$ -fachen Punkt besitzt, also ein Monoid. In diesem Monoide (oder unter den beiden

Theorem LIX. *Die Summe und die Summe der Quadrate der Vielfachheiten, mit welchen eine bestimmte Fundamentalfläche a_i . Ordnung durch die Fundamentalpunkte hindurchgeht, welche sie enthält, sind $4a_i - 1$ und $2a_i^2 + 1$.*

Die stereographische Abbildung der M_2^2 liefert von der Ebene aus die Gleichungen $\Sigma a_{ki} + 2a_i = 3(2a_i) - 1$, weil die Fundamentaleurven die Projectionen der Schnitte von M_2^2 mit den Fundamentalflächen sind, welche jede Erzeugende in a_i Punkten treffen und die Ordnung der Fundamentaleurve also $2a_i$ wird. Ebenso für die Quadrate.

Theorem LX. *Wird durch eine dieser Transformationen ein Flächensystem in ein anderes verwandelt, so wird auch das adjungirte Flächensystem in das adjungirte verwandelt.*

Die Singularitäten, welche die adjungirten Flächen in den Fundamentaleurven 2. Art haben können, bedürfen einer genauen allgemeinen Untersuchung, kommen aber hier nicht in Betracht, da sie auf die Verwandlung durch die Transformation nur dadurch Einfluss haben könnten, dass sie die Vielfachheit der adjungirten Fläche in den Fundamentalpunkten beeinflussen. Dies ist aber nach dem Theoreme LIII. nicht möglich. Der adjungirte Singularitätencomplex ist also $n - 4$, $x_i - 2$ und nach XLIX. in $n' - 4$, $x'_i - 2$ verwandelt.

Theorem LXI. *Für die homaloidalen Curven gilt $\Sigma \alpha = 2(\nu - 1)$, $2\Sigma \alpha^2 = \nu^2 - 1$.*

Denn die Curve geht, weil sie einer Geraden entspricht, gemäss LI. und LII. durch einen k -fachen Fundamentalpunkt $\frac{k}{2}$ -fach und es ist aber $\frac{k}{2} = a_i$, wegen XLIX. und LII. $\Sigma a_i = 2(m - 1)$, $2\Sigma a_i^2 = m^2 - 1$, und nach L. ist die Ordnung ν gleich der der homaloidalen Flächen.

Anmerkung. Andererseits kann man diese Relationen aus LVII. folgern, wenn man das Theorem LXII. hinzunimmt. Lässt man aber den hier gegebenen Beweis und seine Voraussetzungen gelten, was sogar besser ist, so kann man aus den beiden Relationen die Relation des Theoremes

entsprechenden) entsteht dann eine birationale Verwandtschaft, welche sich durch Projection aus den $(2s - 1)$ -fachen Punkten in eine ebene birationale Transformation überträgt.

LVII. herleiten und aus diesem dann auf LVI. schliessen, welches *wichtige* Theorem dann bewiesen ist, ohne auf allgemeine Transformationsrelationen sich zu stützen.

Corollar. Sowohl die homaloidalen Curven als die Fundamentalcurven sind von der Art, dass sie unbeschadet ihrer Natur in Flächen 2. O. enthalten sein können.

Theorem LXII. *Wenn eine homaloidale Curve gegenwärtiger Art in einer M_2^2 enthalten ist, so sind ∞^1 mit denselben Singularitäten in der M_2^2 enthalten.*

Denn die stereographische Projection liefert Curven mit denselben Vielfachheiten und zwei $\frac{m}{2}$ -fachen Punkten oder einen $\frac{m-1}{2}$ -fachen und einem $\frac{m+1}{2}$ -fachen und zwar, da hier m ungerade, den 2. Fall. Es ist also die Dimension

$$\frac{1}{2}m(m+3) - \frac{1}{2}\sum a_i(a_i+1) - \frac{1}{2}\frac{m-1}{2}\left(\frac{m+1}{2} - \frac{1}{2}\frac{m+1}{2}\frac{m+3}{2}\right) = +1$$

gemäss XLIX. und LII.

Es folgt dies auch ohne die Relationen LII. Die Summe der Vielfachheiten ist $2m-2$, damit also eine durch die Fundamentalpunkte gehende M_2^2 die Curve enthalte, bedarf es dreier Bedingungen, die Dimension aller Curven ist aber 4, also bleibt in M_2^2 die Dimension 1.

Theorem LXIII. *Wenn eine Fundamentalfläche A'_i , die zu x_i gehört, a_k -fach durch x'_k geht, so geht die Fundamentalfläche A_k , welche zu x'_k gehört, a_{ik} -fach durch x_i .*

Folgt ebenfalls aus der Projection der invarianten M_2^2 und der entsprechenden Eigenschaft der birationalen Transformationen in der Ebene. Auf demselben Wege ergeben sich noch die Theoreme:

In jeder solchen Transformation des Raumes theilen sich die Fundamentalpunkte jedes Systemes in Gruppchen gleicher Vielfachheit und die Anzahlen der in diesen Gruppchen enthaltenen Punkte sind in beiden Systemen dieselben.

Jedes Gruppchen ist einem bestimmten Gruppchen des zweiten Raumes coordinirt, so zwar, dass die Absonderungsfläche eines Fundamentalpunktes

in jedem Fundamentalpunkte des coordinirten Gruppchens dieselbe Vielfachheit hat mit Ausnahme eines einzigen und die Differenz der Vielfachheiten ist $= \pm 1$.

Auch die Theoreme XXXVII. bis XL. lassen sich mittelst der M_2^2 beweisen.

§ 3. Identität der Transformationen der §§ 1 und 2.

Theorem LXIV. Für die homaloidalen Curven der Transformationen des § 2 ist stets, wenn a_1, a_2, a_3, a_4 die 4 höchsten Fundamentalpunkte sind, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > m$.

Ich denke mir die homaloidale Curve in einer M_2^2 enthalten, was bei dem arithmetischen Character gegenwärtiger Sätze keine Einschränkung und aber nach dem Corollare zu LXI. möglich ist. Es wird also nach LXII. folgen, dass die M_2^2 der Curven ∞^1 enthält. Die stereographische Projection verwandelt diese in ein Büschel von Curven der Ordnung m mit zwei vielfachen Punkten $\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}$ und mit a_1, \dots, a_σ -fachen Punkten, welche Curven $p=0$ haben. Ein solches Büschel ist nach bekannten Theoremen stets auf niedere Ordnung zu bringen durch Anwendung einer Q^2 , welche die drei höchsten Basispunkte besitzt. Es muss also entweder $a_1 + a_2 + a_3 > m$ sein, womit aber das Theorem, u. zw. stärker als gewünscht, bewiesen wäre, oder es muss wenigstens $\frac{m+1}{2} + \frac{m-1}{2} + a_1 > m$ sein. Denn wären auch nur zwei Punkte a gleich $\frac{m-1}{2}$, so müsste $a_1 + a_2 + a_3 > m$ sein, da nicht $a_3 = a_4 = \dots = a_\sigma = 1$ sein kann. Es muss also der Fall supponirt werden, dass dem Nöther'schen Theorem nur durch jene Ungleichheit genügt wird, was aber auch der ungünstigste ist. Gleichzeitig können wir von nun ab die Voraussetzung $a_2, a_3, \dots, a_\sigma > \frac{m-1}{2}$ machen.

Durch Anwendung von Q^2 mit jenen 3 Hauptpunkten folgt dann ein Büschel von Curven der Ordnung $m - a_1$ mit $\frac{m+1}{2} - a_1$ -fachem.

$\frac{m-1}{2} - a_1$ -fachen Punkte und $a_2, a_3, \dots, a_\sigma$ -fachen Punkten. Dieses Büschel muss nun weiter reducirbar sein, es muss also die Summe der drei höchsten Basispunkte $> m - a_1$ sein.

Wäre nun $\left(\frac{m+1}{2} - a_1\right) + \left(\frac{m-1}{2} - a_1\right) + a_2 > m - a_1$, so wäre $a_2 > a_1$, was nicht sein soll. Es muss also $a_2 > \frac{m-1}{2}$ oder $a_1 + a_2 > \frac{m-1}{1}$ sein, und aber ebenso nach $a_3 > \frac{m-1}{2} - a_1$ oder $a_1 + a_3 > \frac{m-1}{2}$ sein. Es bleibt die Transposition durch $\left(\frac{m+1}{2} - a_1\right) + a_2 + a_3 > m - a$, womit $a_2 + a_3 > \frac{m-1}{2}$ verknüpft ist. Die Voraussetzung, dass auch $\frac{m+1}{2} - a_1$ nicht unter den höchsten sei, führt aber zu $a_2 + a_3 + a_4 > m - a_1$, was das Theorem liefern würde.

Bemerken wir nun aber, dass $a_1 \geq \frac{m+1}{4}$ sein muss. Denn wenn alle a_i gleich sind, gilt nach § 2 $\sigma a = 2(m-1)$, $\sigma a^2 = \frac{m^2-1}{2}$ also $a = \frac{m+1}{4}$. Dies ist aber nach bekannten arithmetischen Grundsätzen das Minimum. Nach der Relation $a_2 + a_3 > \frac{m-1}{2}$ bliebe also nur noch zu beweisen, dass auch $a_4 \geq \frac{m+1}{4}$.

Wird die vorletzt genannte Transposition wirklich ausgeführt, so entsteht ein Büschel von Curven $p = 0$ der Ordnung

$$2(m - a_1) - \left(\frac{m+1}{1} - a_1\right) - a_2 - a_3 = \frac{3m-1}{2} - a_1 - a_2 - a_3$$

und mit den Fundamentalpunkten $\frac{m-1}{2} - a_1, \frac{m-1}{2} - a_2, \frac{m-1}{2} - a_3, m - a_1 - a_2 - a_3, a_4, \dots, a_\sigma$, wovon der erstere vom vorherigen Büschel als unverwendet übrig ist, und wo die Punkte nicht in der Reihenfolge der Grösse stehen. Transformirt man nun mit $\frac{m-1}{2} - a_1, \frac{m-1}{2} - a_2, \frac{m-1}{2} - a_3$, so entsteht $3m-1 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 - \frac{1}{2}(3m-3) + a_1 + a_2 + a_3$

$= \frac{3m+1}{2} - a_1 - a_2 - a_3$, also keine Verringerung, während das Büschel reducirbar sein muss. Auch $\frac{m-1}{2} - a_2, \frac{m-1}{2} - a_3, m - a_1 - a_2 - a_3$ können nicht die 3 höchsten Basispunkte sein, weil sie die transponirte Ordnung $3m - 1 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 - 2m + 1 + 2a_2 + 2a_3 + a_1 = m - a_1$ liefern, also wieder keine Verringerung. Es muss also jedenfalls a_4 mit verwendet werden, also a_4 muss unter den drei höchsten Fundamentalpunkten sein. Es möge nun a_4 grösser sein als einer der vorhergehenden Basispunkte. Ist $a_4 > m - a_1 - a_2 - a_3$, so folgt sofort $m > a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ qu. e. d. Ist $a_4 > \frac{m-1}{2} - a_1$, so folgt $\frac{m-1}{2} < a_1 + a_4$ also $a_1 + a_4 \frac{m-1}{2} + 1$ wenigstens, aber es ist auch nach obigem $a_2 + a_3 = \frac{m-1}{2} + 1$ wenigstens, also durch Addition dieser beiden Beziehungen $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = m + 1$ wenigstens. Damit ist denn der ungünstigste Fall erledigt, da unter den vier dem a_4 vorausgehenden Zahlen $\frac{m-1}{2} - a_1$ (oder sicher immer unter den drei ersten Zahlen) die kleinste ist.

Aber der hiemit gelieferte Beweis ist allgemein, da die Hinzunahme der M_2^2 keine andere Bedeutung hat, als der Hinzunahme eines $\frac{m-1}{2}$ -fachen und eines $\frac{m+1}{2}$ -fachen Punktes, welche nach dem in Anmerkung nach LXI. bewiesenen Theoreme LVI. (oder LVII.) vorhanden sind, ein geometrisches Substrat zu liefern.

Der Beweis gilt nun aber auch ohne Rücksicht auf unendlich nahe Lage von Fundamentalpunkten, denn da das Theorem über die ebenen Curvenbüschel, aus dem sich der Beweis entwickelt, ohne diese Einschränkung gilt, und jene Lage sich in keiner anderen Weise bei der Projection geltend macht, so überträgt sich die Allgemeinheit auf den Raum.

Theorem LXV. *Die homaloidalen Curven der Transf. des § 2 lassen sich stets durch Anwendung cubischer Reciprokaltransformationen $(a, b)^3$ in das Geradensystem verwandeln.*

Denn verwendet man die 4 höchsten Fundamentalpunkte a_1, a_2, a_3, a_4 für eine $(a, b)^3$, so wird $3m - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) < 3m - 2m$ d. h. $< m$ werden und die Ordnung ist vermindert. Die neu erhaltenen

Curven sind aber wieder von derselben Art, da ja sie gleichfalls wieder als homaloidale Curven in einer Transformation dieser Classe erscheinen, und gestatten also neuerdings Anwendung von LXIV. und $(a, b)^3$. So fortgesetzt wird m bis auf 3 und dann auf 1 reducirt werden.

Theorem LXVI. *Die Transformationen ohne Fundamentalcurven 1. Art sind aus cubischen Recipokaltransformationen zusammensetzbar.*

Überträgt man nämlich das System der homaloidalen Curven und setzt gleichzeitig $(a, b)^3$ mit der gegebenen Transformation zusammen, so wird die neue Transformation die übertragenen Curven zu homaloidalen haben, also selbst ebenfalls von niedrigerer Ordnung sein, und man wird successive bis zu einer $(a, b)^3$ selbst gelangen können.

Hiemit ist die Identität der Transformationen der §§ 1 und 2 nachgewiesen. Der Beweis des Theoremes hätte auch *direct* für die homaloidalen Flächen geführt werden können und sogar ganz abgesehen davon, dass mit der Relation $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > m$ gleichzeitig für die 4 höchsten Singularitäten $2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4$ der homaloidalen Flächen die Relation $(2a_1) + (2a_2) + (2a_3) + (2a_4) > 2m$ gefunden ist. Man kann nämlich sogar direct eine invariante M_2^2 benutzen, die birationale Verwandtschaft in derselben durch stereographische Projection abbilden, und wird hierbei ein Netz von Curven $p=0$ der Ordnung $2m$ erhalten, welche $2a_1, \dots, 2a_4$ -fache und zwei m -fache Punkte haben, weil die M_2^m jede Erzeugende durch O in m Punkten treffen. In der That ist die Dimension

$$\frac{1}{2} 2m(2m+3) - \frac{1}{2} \sum 2a_i(2a_i+1) - 2 \frac{1}{2} m(m+1) = 3,$$

wovon noch der Transformirte von O , resp. diese Projection zu subtrahiren ist, so dass ∞^2 bleibt. Auf dieses Netz ist dann das Schlussverfahren anzuwenden, womit ich LXIV. bewiesen habe.

§ 4. Einige specielle Transformationen gegenwärtiger Art.

Theorem LXVII. *Wenn ein Fundamentalsystem der Ordnung m einen Fundamentalpunkt der Ordnung $m-1$ enthält, so sind die Vielfachheiten*

der übrigen Fundamentalpunkte die Doppelten der eines ebenen Fundamentalsystemes der Ordnung $\frac{m+1}{2}$.

Denn aus $\sum_1^{\sigma} a_i = 2m - 2$ und $\sum_1^{\sigma} a_i^2 = \frac{m^2 - 1}{2}$ folgt $\sum_2^{\sigma} a_i = \frac{3(m+1)}{2} - 3$,
 $\sum_2^{\sigma} a_i^2 = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - 1$ (da $a_1 = \frac{m-1}{2}$) qu. e. d.

Die Fundamentaleurven 2. Art für ein solches System sind die Geraden, welche a_1 mit a_2, \dots, a_{σ} verbinden, dann die Curven, welche aus denjenigen der erwähnten ebenen Verwandtschaft so abgeleitet werden, dass man den Curven ν . Ordnung Curven $2\nu - 1$. Ordnung substituirt, welche in x_2, \dots, x_{σ} dieselben Vielfachheiten wie jene und in x_1 die Vielfachheit $\nu - 1$ haben. Diese Fundamentaleurven sind für die M_2^m einfach und sind jenen Geraden genau dem Entsprechen in der Ebene (unter den x_i und ihren Fundamentaleurven) gemäss zugeordnet. Die Gesamtanzahl ist also $2(\sigma - 1)$.

Die Fundamentalflächen sind den Punkten x_2, \dots, x_{σ} entsprechend Kegel mit der Spitze in x_1 und aufstehend über den Fundamentaleurven des (fingirten) ebenen Systemes, und dem x_1 entsprechend, eine Fläche $\frac{m-1}{2}$. Ordnung mit $x_1 \frac{m-3}{2}$, welche ausserdem durch x_2, \dots, x_{σ} mit den Vielfachheiten a_2, \dots, a_{σ} geht.

Wenn $2a_1 = 2a_2 = m - 1$, so ist also $2a_3 = \dots = 2a_{\sigma} = 2$, die Fundamentaleurven sind zweimal $\sigma - 2$ Geraden aus x_1, x_2 nach x_3, \dots, x_{σ} , die Gerade $x_1 x_2$ und die Curve $m - 2$. Ordnung durch $x_1^{m-3} x_2^{m-3} x_3 \dots x_{\sigma}$. Die Transformation verwandelt das Ebenenbüschel durch $x_1 x_2$ in das Ebenenbüschel durch $x'_1 x'_2$ und zwar mit quadratischen Verwandtschaften unter den Ebenenpaaren.¹

Theorem LXVIII. Die einzigen Fundamentalsysteme mit $a_1 = \dots = a_{\sigma}$ sind $(1, 1, 1, 1)^3$, $(4, 4, 4, 4, 4, 4)^7$, $(8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)^{15}$.

¹ Die irreductible einfache Fundamentaleurve 1. Art, welche bei der allgemeinen dyoidalen Transformation mit quadratisch verwandten Ebenen auftritt, ist also hier in obiger Weise zerfallen und dadurch in die 2. Art übergegangen, dass sich der Character 1. Art auf einzelne Punkte in ihr zusammengezogen hat.

Aus XLIX. und LII. folgt $\sigma\alpha = 2(m-1)$, $2\sigma a^2 = m^2 - 1$, $a = \frac{m+1}{4}$,
 $\sigma = \frac{m-1}{m+1}$, $m = \frac{8+\sigma}{8-\sigma}$, welches ganz wird für $\sigma = 4, 6, 7$ und $m = 3, 7, 15$.

Diese Fundamentalsysteme sollen als Q^3 , Q^7 , Q^{15} bezeichnet werden, während T^k immer die Potenz einer Transformation bezeichnen soll.

Die Fundamentalcurven für Q^7 sind die 15 Geraden $x_i x_k$ einfach und die $(x_1 \dots x_6)$ dreifach, für Q^{15} die 21 Geraden $x_i x_k$ einfach und die 7 Curven $(x_i x_{i+1} \dots x_{i+6})^3$ dreifach. Die Fundamentalflächen für Q^7 sind Kegel $(x_i^2 x_{i+1} \dots x_{i+5})^2$ und für Q^{15} Flächen 4. Ordnung $(x_i^3 x_{i+1}^2 \dots x_{i+6}^2)^4$.

Theorem LXIX. *Unter den Transformationen mit nicht mehr als 6 Punkten kann keine höhere als 7., mit nicht mehr als 7 keine höhere als 15. Ordnung sein.*

Die Fundamentalflächen sind nämlich nur Ebene durch 3 Punkte, quadratischer Kegel, M_2^3 mit 4 Doppelpunkten und 3 einfachen, M_2^4 mit 1 dreifachen und 6 Doppelpunkten. Wegen LXVIII. und Minimumsätzen hat jede Transformation höherer als 7., 15. O. einen höheren also 4- oder 8-fachen Fundamentalpunkt.

Theorem LXX. *Die Fundamentalsysteme mit weniger als 8 Punkten sind $(1, 1, 1, 1)^3$, $(4, 4, 2, 2, 2, 2)^5$, $(6, 4, 4, 4, 2, 2, 2)^7$, $(4, 4, 4, 4, 4, 4)^7$, $(8, 4, 4, 4, 4, 4, 4)^9$, $(6, 6, 6, 4, 4, 4, 2)^9$, $(8, 6, 6, 6, 6, 4, 4)^{11}$, $(8, 8, 8, 6, 6, 6, 6)^{13}$, $(8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)^{15}$. Die Anzahl der Fundamentalsysteme mit einer Anzahl $\sigma > 7$ Fundamentalpunkten ist unendlich.*

Die ersten Fundamentalsysteme gewinnt man leicht mit Anwendung des Theoremes LXVI. Zum Beweise des 2. Theiles des Th. genügt es, die cubische Characteristik $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$ b_1 in b'_1 in $\dots b_1^h = a$, für $h > 3$ zu verwenden. Denn nach der Theorie dieser Transformationen (s. Am. J. 1896) ist sie für $h > 3$ aperiodisch und liefert also unendlich viele Fundamentalsysteme, welche keine anderen als diese Fundamentalpunkte haben und von denen keines unendlich oft wiederkehren kann, ohne Periodicität zu bewirken.

II. THEIL.

Theorie der periodischen Characteristiken. Äquivalenz mit den Typen.

§ 1. Allgemeine Sätze über Characteristiken und die linearen Substitutionen I) und II).

Das Problem der Zusammensetzung führt nun sofort zum Probleme der Periodicität. Hier eben erweisen sich die Fundamentalsysteme des I. Theiles als die genaue Verallgemeinerung der birationalen Transformationen der Ebene. Damit nämlich Reduction der Ordnung bis auf Eins durch successive Anwendung (T^i) eintreten könne, reicht das Princip der Verkettung der Fundamentalpunkte vollkommen aus. Damit also die Characteristik, d. i. die Gesamtheit der Fundamentalgebilde und ihrer Transformirten, Periodicität liefere, ist nothwendig, dass die Fundamentalpunkte b_i von R'_3 mit den a_i von R_3 verkettet oder coincident sind. Für die Verminderung der Ordnung ist die Verkettung der Fundamentalcurve 2. Art gleichgiltig. Die Fälle, wo b_i mit Fundamentalcurven c_i incident sind, ohne in Fundamentalpunkte überzugehen, können also nicht periodisch sein. Um die entsprechenden Substitutionen I) und II) zu schreiben (characterisirt), hat man also n' dem n , die x' den x und die y' den y zuzuweisen und die x', x , die y', y je unter einander zu verkettten.¹ Rein arithmetisch ist die Verkettung der y', y von jener der x', x ganz unabhängig und hier zweigt sich abermals eine neue arithmetische Untersuchungsrichtung von dem geometrischen Gebiete ab. Jedoch gilt in Folge des Theoremes LIII:

Theorem I. *Durch die Coincidenzen und Verkettungen der Fundamentalpunkte sind die Coincidenzen und Verkettungen der Fundamentalcurven*

¹ Rein arithmetisch ist es sogar möglich, auch die x' mit den y , die y' mit den x zu verkettten. Die Schreibung der Substitutionen I) und II) für diesen Fall kann möglicher Weise zu neuen Classen ganzzahliger periodischer linearer Substitutionen führen.

(2. Art) vollständig bestimmt. Die Characteristik ist schon periodisch, wenn auch nur die unvollständigen Substitutionen I) periodisch sind.

Es folgt also daraus auch die Periodicität des vollständigen Substitutionen I) und II). Das Theorem (von FROBENIUS) über die Periodicität einer linearen Substitution überträgt sich auch hierher.¹ Die characterisirten Substitutionen I) oder II) sind periodisch, wenn die characteristische Function einfache Elementartheiler und nur Einheitswurzeln zu Wurzeln hat.

Corollar. Sobald die Zahl $\sigma < 8$, kann die Periodicität keinen Index > 30 haben (Crelles Journal, Bd. 114, p. 50). Auf Grund der Theoreme XLIII. bis XLV. und dann Ende von § 2 kann auch die Directrixsubstitution einer Characteristik definirt werden. Man lässt in einer primitiven Characteristik (d. i. nur mit Verkettungen) auf einen Punkt a_i jenen folgen, der dem mit jenem coincidenten nach XLIV. conjugirt ist. In der derivirten Characteristik (d. i. mit Verkettungen) setzt man den Cyclus genau durch die Verkettungen der Characteristik fort und schliesst ihn wie bei der primitiven.

Die wichtigen Theoreme XXV. bis XXXIX. auf p. 62 bis 64 cit. Abh. gelten genau auch hier, wobei nur in XXXIX. statt Transformationen von Jonquières die Transformationen dieser Abh. I. Th. § 4 LXXXVII. a. E. zu setzen sind und in XXXII. statt 2, 3 hier 3, 4.

Theorem II. Jede Characteristik mit weniger als 8 Punkten liefert ein endliches Tableau successiver Transformationen und ist periodisch.

Denn nach I. § 4. gibt es nur eine endliche Anzahl von Fundamentalsystemen, welche nur in eine endliche Anzahl Characteristiken über die 7 Punkte vertheilt werden können und keine Characteristik kann sich in derselben Vertheilung über die 7 Punkte wiederholen, da sonst (cf. cit. Abh.) die Characteristik sich schon früher mit der Collineation hätte endigen müssen.

Theorem III. Die involutorischen Characteristiken $(a_i b_i)$ von Q^7 und Q^{15} sind vertauschbar mit allen Characteristiken von 6, resp. 7 Punkten.

Jede $(a, b)^3$, welche die 4 Punkte über den 6, 7 Punkten besitzt, verwandelt die Transformation in eine Transformation derselben Art,

¹ Für die Ebene von mir angegeben Crelles Journal Bd. 114, p. 61.

also auch jede aus $(a, b)^3$ zusammengesetzte Characteristik über den 6, 7 Punkten.

Die Theoreme L. bis LIV. cit. Abh. gelten auch hier, ebenso auch Th. LV., LVI. In der Deutung von LVI. (l. c.) tritt jedoch hier eine Änderung ein. Die Zahl $m - a_{1z_1} - \dots - a_{\sigma z_\sigma}$ ist eine Invariante der unvollständigen Substitutionen I), die Anzahl der Doppelpunkte im R_3 ist jedoch hier $2m + 2 - \nu$, wo ν die Verringerung durch uneigentliche Doppelpunkte ist und diese Anzahl ist bei Erhaltung der Zahl σ der Characteristikpunkte (d. i. der Variabelnzahl der Substitution) gewiss invariant. Es muss also die Differenz

$$2\nu - (a_{1z_1} + \dots + a_{\sigma z_\sigma})$$

invariant sein u. zw. wie Beispiele lehren, constant und weiter gleich Null. Dies beweist das

Theorem IV. *Die Incidenz eines Fundamentalpunktes a_i gegenwärtiger Transformationen mit der ihm entsprechenden Absonderungsfläche, welche a_{ik} -fach durch den dem a_i -coincidenten Fundamentalpunkt b_k hindurchgeht, absorbiert (uneigentlich) $2a_{ik}$ Doppelpunkte.*

Die 1. Invariante der Substitution 1.) ist also die Hälfte der Anzahl der eigentlichen Doppelpunkte, noch vermindert um 1.

Die Theoreme LXIV. bis LXXVIII. der cit. Abh. gelten mit geringen Abänderungen auch hier. An die Stelle von LIX. bis LXIII. l. c. treten Theoreme, welche erst nach Ausspruch des Äquivalenztheoremes in § 5 bewiesen und angegeben werden sollen.

Theorem V. *Die charakteristischen Functionen der Substitutionen I) und II) sind für jede Characteristik einander gleich.*

Man beweist es, indem man die Reduction auf die Typen durchführt, für jeden einzelnen Typus den Beweis führt und dann bemerkt, dass die allgemeinen Typen durch Hinzufügung von Cyclen entstehen, welche in beide Functionen gleiche Factoren liefern.

Theorem VI. *Wenn eine Characteristik gegenwärtiger Fundamentalsysteme periodisch ist, sind alle Wiederholungen, welche denselben Index haben, mit ihr durch eben solche Transpositionen äquivalent.*

Auch dies wird für die einzelnen Typen des II. Th. § 5 bewiesen und von dort aus auf die äquivalenten nicht typischen Charakteristiken geschlossen, weil aus $P^{-1}T^kP = T$ folgt $P^{-1}(Q^{-1}TQ)^kP = Q^{-1}TQ$.

Theorem VII. Wenn die Anzahl der Factoren $(x - 1)$ der charakteristischen Function $>$ als der Rang der Charakteristik plus 1, ist die Charakteristik einer der §§ 3, 4 äquivalent.

§ 2. Die anallagmatischen Curvensysteme und die Reductibilität auf die Typen.

I. Beweis.

Theorem VIII. Jede periodische Charakteristik besitzt unendlich viele invariante Singularitätencomplexe n, x_1, \dots, x_σ beliebig hohen Geschlechtes p .

Denn da es sich hier nur um Charakteristiken handelt, so kann man die Gesamtheit der transformirten Curven einer Geraden stets in solcher Lage befindlich denken, dass dieselbe als reductible Raumcurve gelten kann, was die Erfüllung zweier Ungleichheiten erfordert. Seien n_1, \dots, n_σ die Partialordnungen, h_1, \dots, h_σ die Partialanzahlen der scheinbaren Doppelpunkte, k_{ij} die Anzahlen der gemeinsamen Treffgeraden dieser Theile, so muss wegen der Projection auf eine Ebene, $n = n_1 + \dots + n_\sigma$, $2(h_1 + h_2 + \dots + h_\sigma + \sum k_{ij}) \leq (n-1)(n-3)$ sein und da $2h_i \leq (n_i-1)(n_i-2)$, ist $2\sum h_i \leq \sum n_i^2 - 3\sum n_i + 2\sigma$ und also, wenn in den letzten Formeln die Gleichheit gilt,

$$(2) \quad 2\sum k_{ij} \leq 2\sum n_i n_j - 2(\sigma - 1).$$

Andererseits ist $4(\sum h_\sigma + \sum k_{ij}) \geq (n-1)^2$ und da $4h_i \geq (n_i-1)^2$, ist $4\sum h_i \geq \sum n_i^2 - 2\sum n_i + \sigma$, also, wenn in der letzten Formeln Gleichheit gilt, sicher

$$(3) \quad 4\sum k_{ij} \geq 2\sum n_i n_j - (\sigma - 1).$$

Das Geschlecht p der Gesamteurve ist $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum h_i - \sum k_{ij}$, also $2p = \sum n_i n_j - (\sigma - 1) + \sum p_i - \sum k_{ij}$, daher $2p = \sum p_i + \sum n_i n_j - (\sigma - 1) - \sum k_{ij}$

und im Falle der Giltigkeit der vorhergehenden beiden Formeln, d. i. sicher dann, wenn $p_i = 0$,

$$(4) \quad 2p = \sum n_i n_j - (\sigma - 1) - \sum k_{ij}$$

stets positiv. Dieser Fall $p_i = 0$ tritt ein, wenn man die Transformirten einer rationalen Curve summiert und es kann unter Erfüllung von (2) und (3) der Werth von (4) willkürlich gross gemacht werden. Übrigens können (2) und (3) auch mit $p_i \geq 0$ erfüllt werden.

Theorem IX. *Wenn eine Transformation gegenwärtiger Art einen Complex $\pi, \xi_1, \dots, \xi_\sigma$ in sich transformirt, transformirt sie auch $\pi - 4, \xi_1 - 1, \dots, \xi_\sigma - 1$ in sich.*

Denn dieser ist die lineare Combination aus jenem und aus $4, 1, \dots, 1$. Der 2. kann der adjungirte Complex des 1. genannt werden. Man kann nun von irgend einem Complexe ausgehend die Reihe der successive adjungirten Curvensingularitätencomplexe bilden.

Theorem X. *Für jeden Singularitätencomplex, welcher durch eine der gegenwärtigen Charakteristiken anallagmatisch ist, ohne Fundamentalcuren 2. Art zu schneiden, kann man numerisch voraussetzen, dass die Curve ohne jene Singularitäten das Maximalgeschlecht besitze.*

Denn nach Annahme von ξ_1, \dots, ξ_σ hängt das Geschlecht nur von der Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte ab, welche aber auf die Charakteristik ohne Einfluss ist, schon darum, weil man die Curve wegen der Invarianz der M_2^2 (Th. XLIX.) in einer solchen enthalten voraussetzen kann, in einer solchen M_2^2 aber M_1^n des Maximalgeschlechtes enthalten sind und vermöge der Schnitte mit den Erzeugenden wieder in solche verwandelt werden. Für die »Transformationen« wird jedoch ein eigener, genauerer Beweis zu suchen sein. Die Voraussetzung des Maximalgeschlechtes soll nun hinfort immer gemacht werden.

Theorem XI. *Dann ist die Zahl u des adjungirten Singularitätencomplexes gleich der Zahl $p - 1$ des vorhergegangenen Complexes.*

Das p dieser Curve ist $\frac{(n-2)^2}{4} - \sum \frac{\xi_i(\xi_i-1)}{2}$. Das u des adjungir-

ten Complexes muss definirt werden wie oben für die homaloidalen Curven als die Dimension einer in einer M_2^2 enthaltenen Curve n, x_1, \dots, x_σ .

Nun ist diese Dimension $\frac{n(n+3)}{2} - 2 \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) : 2 - \sum \frac{x_i(x_i+1)}{2}$ für $n=4, x_i=1$ gebildet $(n^2 - 4n - 2 \sum x_i(x_i - 1)) : 4$ und aber das vorhergehende p ist wie soeben $(n^2 - 4n + 4 - 2 \sum x_i(x_i - 1)) : 4$.

Anmerkung. Diese willkürliche Zuschreibung einer Zahl u , welche jedoch die wichtige Eigenschaft hat, endlich constant abzunehmen, ist einem ähnlichen Vorgange zu vergleichen, welcher bereits in der Theorie der r -dimensionalen quadratischen Transformationen in Amer. J. 1896 aufgetreten ist.

Theorem XII. *Wenn die Curven des adjungirten Singularitätencomplexes zerfallen, so kann dies nur so geschehen, dass die Bestandtheile mehrere Curven eines linearen ∞^2 -Systemes sind oder eine feste Curve und ein in einem linearen Systeme variirender Bestandtheil.*

Der Beweis wird ähnlich wie in Acta Math. Bd. 19, p. 119.

Ich bilde nun für irgend ein invariantes Curvensystem von hinreichend hohem p das adjungirte System, für dieses abermals und setze sofort, indem ich, wenn der Fall XII. eintritt, die Verminderung nur auf den variablen Bestandtheil anwende. Das Verfahren wird jedoch aufgehalten, wenn man zu $p=0$ kommt und schon für $p=1$ wird $u'=0$ und der adjungirte Complex könnte dann auch als Fundamentalcomplex (Fundamentalcurve) in die Transformation eintreten. Für diese Fälle sorgen die folgenden Theoreme.

Theorem XIII. *Wenn ein Curvensystem nur in Folge vielfacher Punkte in der Characteristik $p=0$ und die obige Zahl $u=2$ hat, ist es durch Recipokaltransformationen übertragbar in die Geraden eines Strahlenbündels.*

Es gelten die Formeln $[(n-2)^2 - 2 \sum x_i(x_i - 1)] = 0, 1, 2, 3$ und $[n(n+3) - n(n+1) : 2 - \sum x_i(x_i + 1)] : 2 = -1$, woraus folgt $\sum x_i = 2n^1$ und $\sum x_i^2 = \frac{n^2}{2} + 2$. Mittelst dieser kann man noch wie in I. Th. § 3.

¹ Die Formeln des Textes sind unter der Voraussetzung von geradem n gegeben. Ganz entsprechende Formeln entstehen für ungerades n mit der Bedingung, dass die Erzeugenden in $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ Punkten getroffen werden.

LXIV. die Reduction bis auf $n = 1$ durchführen, wenn man beachtet, dass in diesen noch Bruchtheile mit dem Nenner 4 enthalten sein können.

Theorem XIV. *Wenn ein Curvensystem nur in Folge vielfacher Punkte in der Characteristik $p = 0$ und $u = 3$ hat, ist es durch Recipokaltransformationen in Raumcurven 3. O. durch 3 feste Punkte oder für $u = 4$ in die Geraden des Raumes oder in die Kegelschnitte durch 2 feste Punkte übertragbar.*

Denn es können ebenso wie in I., LXIV. und hier XIII. zwei Formeln aufgeschrieben werden, aus welchen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 2n$ folgt und man muss für $u = 4$ das in § 3. vernachlässigte Kegelschnittsystem hier aufnehmen. Für $u = 3$ gibt es kein anderes durch Punkte allein bestimmtes System.

Theorem XV. *Wenn eine Characteristik gegenwärtiger Art ein Geradenbündel in sich verwandelt, ist sie eine Transformation des I. Th. § 4. mit $(a_1^{m-1} b_1^{m-1})$.*

Denn der Scheitel des Bündels muss ein $(m - 1)$ -facher Fundamentalpunkt für beide Räume sein, nach I. Th. § 1.

Theorem XVI. *Wenn eine Characteristik ein Curvensystem $p = 0$, $u = 2$ der Art des I. Th. in sich verwandelt, ist sie birational äquivalent einer Characteristik mit $(a_1^{n-1} b_1^{n-1})$.*

Das Curvensystem werde durch Transpositionen des I. Theiles in ein Geradenbündel übertragen, dann wird gleichzeitig die Characteristik in eine mit invariantem Geradenbündel transponirt, worauf dann XV. anwendbar ist.

Theorem XVII. *Wenn eine Characteristik alle C_3 durch 3 feste Punkte unter einander verwandelt, ist sie eine cubische Transformation mit $(a_1 a_i)$, $(a_2 a_{k_2})$, $(a_3 a_{l_3})$, wo $i, k, l = 1, 2, 3$.*

Denn nur für diese ist die Summe der Ordnungen von drei Fundamentalpunkten $3(m - 1)$.

Theorem XVIII. *Wenn eine Characteristik einen Complex $p = 0$, $u = 3$ in sich transformirt, ist sie äquivalent einer cubischen Characteristik aus XVII.*

Man wendet XIV. an und auf das erhaltene C_3 -system XVII.

Theorem XIX. *Wenn eine Characteristik einen Complex $p = 0$, $u = 4$ in sich transformirt, ist sie entweder einer Collineation oder einer Characteristik $(a_1^{m-1} b_2^{m-1})(a_2^{m-1} b_1^{m-1})$ oder einer Characteristik $(a_1^{n-1} b_1^{n-1})$ birational äquivalent.*

Man wendet XIV. an und das Lemma, dass eine Characteristik, welche die Kegelschnitte durch 2 Punkte a_1, a_2 unter einander verwandelt, entweder die eine oder die andere des Theoremes sein muss.

Theorem XX. *Jedes Curvensystem der Art des I. Theiles, welche $p = 1$, $u = 2, 3, 4$ hat, kann durch successive Reciprokaltransformationen in ein System von Curven 4. O. 1. Art durch 8, 6, 5 Punkte übergeführt werden oder für $u = 2$ in ein System von Curven 4s. Ordnung mit 8 s-fachen Punkten.*

Die beiden Formeln

$$\frac{(n-2)^2}{4} - \sum \frac{x_i(x_i-1)}{2} = 1,^1$$

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{n(n+2)}{4} - \sum \frac{x_i(x_i+1)}{2} = u$$

liefern $\sum x_i^2 = \frac{n^2}{2} - u$, $\sum x_i = 2n - u$. Aus diesen kann mittelst desselben Verfahrens, dass ich oben für die rationalen Curven eingeschlagen und unter Benützung der bekannten Sätze über die Systeme elliptischer Curven in der Ebene die Relation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 2n$ abgeleitet werden, in-
solange $n > 4$ oder $x_i \geq x_k$.

Theorem XXI. *Wenn eine Characteristik gegenwärtiger Art ein Curvensystem $p = 1$, $u = 2, 3, 4$ in sich transformirt, so ist sie einer Transformation mit 8, 7, 6, 5 Punkten in der Characteristik birational äquivalent.*

Denn es gilt wegen $\sum a_i = 4(m-1)$ das Lemma, dass eine Characteristik, welche ein $\infty^2, \infty^2, \infty^4$ System von C_4 $p = 1$ in sich transformirt, ausser diesen festen Punkten keine Fundamentalpunkte, also auch

¹ Auch hier sind nur die Formeln für gerades n gegeben. Neben diesen stellen sich entsprechende für ungerades n .

keine Charakteristikpunkte haben kann. Wenn also nach Anwendung von XX. das C_4 -System erreicht ist, muss auch die Charakteristik mit weniger als 9 Punkten erlangt sein.

Theorem XXII. *Eine periodische Charakteristik mit 8 Punkten muss stets entweder einer monoidalen oder einer dyoidalen oder einer Charakteristik mit $\sigma < 8$ Punkten äquivalent sein.*

Denn wenn sie keinen anallagmatischen Complex mit $p = 0$ gestattet, so muss man durch die Anwendung der Verminderung auf die invarianten Complexe mit höherem p stets auf Complexe mit $p = 1$ gelangen. Ein zweiter Complex $p = 1$, $u = 2$ kann aber nicht da sein, da man durch Transpositionen, welche nur Fundamentalpunkte unter den 8 Punkten benützen, auf C_4 $p = 1$ kommen müsste, wobei die schon vorhandenen C_4 $p = 1$ ebenfalls erhalten blieben, was unvereinbar ist. $p = 1$, $u = 1$ erfordert aber successive $p = 1$ und diese führen sofort zur Existenz von nur $p = 1$, was mit der Periodicität gemäss VIII. unvereinbar ist. Aus dem 2. Gliede des Schlusses wird also $u = 3$ gefolgert.

Für die Transformationen kann der Beweis anders geführt werden.

Theorem XXIII. *Jede periodische Charakteristik eines Fundamentalsystemes gegenwärtiger Art ist durch Reciprokaltranspositionen äquivalent entweder:*

1. *Einer Collineation, oder*
2. *Einer Charakteristik mit $(a_1^{n-1} b_1^{n-1})$, oder*
3. *Einer Charakteristik mit $(a_1^{n-1} b_2^{n-1})(a_2^{n-1} b_1^{n-1})$, oder*
4. *Einer Charakteristik mit $\sigma < 8$ Punkten.*

Zum Beweise dieses Haupttheoremes verwende ich nun das oben nach XII. erwähnte Princip der Verminderung der adjungirten Complexe. Ich gehe von einem Complexe aus, dessen u gemäss Theorem VIII. bereits als ≥ 2 vorausgesetzt werden kann, da die Curven des Systemes doch den ganzen R_3 mindestens einfach erfüllen müssen und bilde die Reihe der successiven adjungirten Complexe. Nach LX. des I. Theiles müssen auch diese durch die Charakteristik anallagmatisch sein. Entweder kann die Reihe bis $n = 1, 2, 3, 4$ fortgesetzt werden, dann ist die Charakteristik von selbst eine von denen des Theoremes. Oder man wird

durch einen Complex $p = 0$, $u > 1$ aufgehalten; dann wendet man die Theoreme XVI., XVIII., XIX. an. Oder man wird durch $p = 1$ aufgehalten, wo man wieder $u > 1$ voraussetzen mag; dann wendet man XXI. an, vervollständigt durch XXII.

II. Beweis.

Es werden wieder die invarianten Curvensysteme benützt. Nur wird die Existenz der rationalen oder elliptischen Curvensysteme als Folge der Periodicität auf andere Art hergeleitet.

Theorem XXIV. *Jede Charakteristik gegenwärtiger Fundamentalsysteme kann man sich widerspruchslos in einer invarianten M_2^2 enthalten denken.*

Denn die stereographische Projection liefert eine ebene Charakteristik von Fundamentalsystemen, welche durch Zusammensetzung von nur Fundamentalsystemen $(e_1^3 e_2^3 b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 a)^6$ wo e_1, e_2 die Schnittpunkte mit den Erzeugenden des Centrums sind, gewonnen werden. Alle diese Charakteristiken mit denselben e_1, e_2 geben eine geschlossene Gruppe und liefern durch Rückprojection auf die M_2^2 eine Charakteristik fraglicher Art.

Corollar I. Die Theorie gegenwärtiger Charakteristiken sowie ihrer endlichen Gruppen kann als identisch mit der Theorie der eben beschriebenen ebenen Charakteristiken bei gemeinsamen e_1, e_2 angesehen werden.

Corollar II. Jede Charakteristik aus XXIV. kann widerspruchslos als in einer C_4 mit Spitze oder einer zerfallenden C_4 , welche invariant seien, enthalten angesehen werden.

Theorem XXV. *Jede periodische Charakteristik gegenwärtiger Fundamentalsysteme besitzt entweder ein invariantes Curvensystem (Singularitätencomplex) $p = 0$ und Dimension > 1 oder ein invariantes Curvensystem (Singularitätencomplex) $p = 1$ und Dimension > 1 .*

Denn die als invariant vorausgesetzte M_2^2 gibt durch stereographische Projection eine ebene periodische Transformation, welche also auch, als Charakteristik aufgefasst, einen invarianten Complex gestattet, der entweder $p = 0$ oder $p = 1$ hat, gewiss aber $u > 0$, wofür der Bildung des u zufolge die räumliche Dimension > 1 geschrieben werde.

Von dem Theoreme XXV. gelangt man durch meine oben hergeleiteten Hilfstheoreme eben wieder zum Haupttheoreme XXIII.

Anmerkung. Es könnte im Anschlusse an XXIV. ein anderer Beweis versucht werden, wenn in der Ebene bewiesen werden könnte, dass die Charakteristiken der im Beweise zu XXIV. genannten Art durch Fundamentalsysteme $(e_1^3 e_2^3 b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 a)^6$ mit gemeinsamen e_1, e_2 auf Typen transponirt werden können.

III. Beweis.

Theorem XXVI. *Jede periodische Charakteristik besitzt unendlich viele invariante Singularitätencomplexe n, x_1, \dots, x_σ von beliebig hohem Flächen-geschlechte p .*

Die Formel für die Zahl p wird aus der Nöther'schen Formel (Ann. di Mat., ser. 2, t. 5) durch ein Zusatzglied erhalten, das wegen der ausgezeichneten Curven, welche die Fläche in den Fundamentalcurven 2. Art besitzen kann, gewonnen wird. Dieses Glied ist hier gewiss positiv und seine Weglassung verstärkt nur den zu liefernden Beweis. Dann bleibt aber eine in n und x_i cubische Formel, welche für die Argumente $n_1 + \dots + n_i, x_1^{(i)} + \dots + x_i^{(i)}$ nach bekannten arithmetischen Sätzen einen Werth annimmt, der $>$ als die Summe ihrer Werthe für die Argumente $n_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(o)}; n_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(o)}; \dots$ In Folge dessen kann man aus einem Singularitätencomplexe nebst seinen sämtlichen Transformirten successive Singularitätencomplexe von stets wachsendem p herstellen.

Theorem XXVII. *Wenn der adjungirte Singularitätencomplex $n - 4, x_1 - 2, \dots, x_\sigma - 2$ ¹ zu einer zerfallenden Fläche gehört, so zerfällt diese entweder in eine feste Fläche und einen in einem linearen Systeme variablen Bestandtheil oder in mehrere Flächen eines und desselben linearen Systemes.*

Der Beweis wird genau wie für die Ebene in Acta Math. t. 19, p. 119 geliefert.

Theorem XXVIII. *Wenn für einen invarianten Singularitätencomplex n, x_1, \dots, x_σ die Zahl $p < 0, u > 1$ wird, so können die Singularitäten-*

¹ Hier für Flächen bedarf es keiner neuen Definition des adjungirten Complexes, es ist die Clebsch—Zeuthen—Nöther'sche, die schon im I. Theile erwähnt wurde.

complexe n, x_1, \dots, x_σ der diesen Fällen gegenseitig gemeinsamen Schnittcurven nur $p = 0, 1$ haben.

Die zu diesen Curven adjungirten Flächen sind der Ordnung $2n - 4$ und gehen $(2x_i - 2)$ -fach durch die Punkte der Characteristik. Sie sind ebenfalls invariant und schneiden auf den Curven die bekannte $G_{2(p-1)}^{p-1}$ aus. Nun gibt es keine Flächen $n - 4, x_i - 2$; in Folge dessen auch keine $n - 2, x_i - 1$ und mithin auch keine $2(n - 2), 2(x_i - 1)$, wie aus den Formeln für p zu beweisen ist. Die Curven können also keine Reihe G besitzen und müssen $p = 0, 1$ haben.

Theorem XXIX. *Die hier möglichen invarianten Complexe n, x_1, \dots, x_σ , welche $p < 0$ haben, ohne zu zerfallen, sind durch Reciprokaltransformationen überführbar in Kegelfächensysteme mit gemeinsamer Spitze.*

Denn die rationalen Curven, in denen sie sich schneiden, müssen stets ein Büschel bilden (sodass also die Schnittcurve stets in mehrere Bestandtheile zerfällt), weil ein Netz von rationalen Curven auf einer der Flächen sofort deren Abbildbarkeit, also $p = 0$ für sie bedingen würde. Die elliptischen Curven schliessen sich aber aus wegen des Reductionstheoremes aus XX., weil mit diesen 8 Punkten Flächen von $p < 0$ nicht gebildet werden können (als Örter von je ∞^1 elliptischen $C_{4s} a_1^s \dots a_8^s$). Auf das ∞^2 System von Curven mit $p = 0$ kann dann das Reductionstheorem angewendet werden.

Theorem XXX. *Wenn eine Characteristik gegenwärtiger Art einen Flächensingularitätencomplex n, x_1, \dots, x_σ mit $p = 0, u > 0$ invariant lässt, lässt sie stets auch einen Curvensingularitätencomplex $p = 0, u > 1$ oder $p = 1$ invariant.*

Denn da die Flächen eines Büschels im Systeme $p = 0$ haben, sind sie abbildbar und indem man die unter zweien hervorgerufene Verwandtschaft in die Ebene abbildet, schliesst man aus den Theoremen für diese hier, dass es stets ein rational distinctes, in ein ganz analoges übergeführtes Curvensystem $p = 0$ oder $p = 1$ geben muss. Da aber für alle Flächen des Büschels die abbildenden Punkte und Linien in derselben Weise vertheilt sind (obwohl nicht eben dieselben sein müssen), so werden diese Curvenbüschel insgesamt ein Curvensystem $u \geq 2$ geben.

Zur Vollendung des Beweises für XXIII. bliebe nun noch übrig, ein Äquivalenztheorem für die Flächensysteme n, x_1, \dots, x_s zu suchen, welche $p = 1, u > 0$ besitzen. Es ist hier nöthig, eine Beschränkung einzuführen.

Die Nöther'sche Formel gilt für die homaloidalen Systeme, welche hier auftreten, deswegen *nicht*, weil die hier so zahlreich und wesentlich erscheinenden Fundamentalcuren 2. Art als »mitbedingte Curven« zuweilen einen Zusatz von Gliedern erforderlich machen. Aus demselben Grunde gilt sie nicht für alle invarianten Flächensysteme, die hier auftreten. Festzuhalten ist jedoch, dass wenn ein Flächensystem nur solche gemeinsame Curven hat, welche eine nothwendige Folge seiner singulären Punkte sind, auch das adjungirte Flächensystem nur durch solche gemeinsame Curven geht, welche eine nothwendige Folge seiner singulären Punkte sind.

Dieser Zusatz, welcher also ausdrückt, dass die Durchgänge einer Fläche durch die Punkte a_1, \dots, a_s nicht unabhängig sein müssen, ist aber jedenfalls hier positiv. Seine Weglassung reducirt daher die Dimensionszahl, resp. das Geschlecht p .

Ich erlaube mir nun den Kunstgriff, in der Reihe der successiven adjungirten Systeme jedesmal nur $(n+1)(n+2)(n+3) - \sum x_i(x_i+1)(x_i+2)$ zu berechnen, welcher Standpunkt auch dadurch erreichbar wäre, dass man nur invariante Flächensysteme sich dächte, welche in keiner Weise durch Fundamentalcuren 2. Art hindurchgehen. Ob es aber solche gibt, müsste erst bewiesen werden, da die durch Summation der Transformirten einer Fläche gewonnenen diese Eigenschaft nicht haben. Dann spreche ich also aus:

Theorem XXXI. *Alle Flächensingularitätencomplexe n, x_1, \dots, x_s , welche das so berechnete p gleich 1 und u (entsprechend berechnet) > 0 haben, sind durch Reciprokaltransformationen übertragbar in $n = 2s, x_1 = \dots = x_s = s$.*

Denn man kann mittelst der Theorie der Maxima und Minima beweisen, dass für jene Complexe, solange sie nicht diese typische Form haben, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 2n$. Nämlich bei geradem n wird der obige Complex, bei ungeradem der entsprechend gebildete unter allen, welche gleiche p, u liefern, die kleinsten x_i haben. Hier ist aber $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2n$, für die aber, welche ungleiche x_i haben, wird diese Summe stets grösser sein.

Theorem XXXII. *Eine Charakteristik, welche das Flächensystem $n = 2s$, $x_i = s$ in sich verwandeln soll, kann ausserhalb dieser Punkte keine Punkte besitzen.*

Denn erst, wenn die Fläche in allen Fundamentalpunkten s -fache Punkte hat, wird $n' = m \cdot 2s - \Sigma s = 2s$ nach Th. XIV. des I. Theiles.

Theorem XXXIII. *Eine Charakteristik, welche nur die invarianten Singularitätencomplexe $n = 2s$, $x_i = s$ besitzt, kann für $\sigma \geq 8$ nicht periodisch sein.*

Denn für $\sigma = 5, 6, 7, 8$ werden die Zahlen p nach oben berechnet

$$\frac{3s^3 + 9s^2 + 12s}{6}, \frac{2s^3 + 6s^2 + 10s}{6}, \frac{s^3 + 3s^2 + 8s}{6}, s$$

und für $\sigma = 9$ bereits negativ, sodass dem Th. XXVI. nicht entsprochen würde. Aber auch für $\sigma = 8$ ist die Existenz der invarianten Singularitätencomplexe nur scheinbar. Für die Transformationen soll es später (III. Th.) bewiesen werden, für die Charakteristiken kann man zunächst die Existenz von nur Curvensingularitätencomplexen mit $n = 4s$, $x_1 = \dots = x_s = s$ folgern und hieraus die Aperiodicität mittelst der invarianten M_2^2 .¹

Habe ich nun diese Hilfssätze² vorausgeschickt, so gelange ich zum Haupttheoreme XXIII, indem ich auf die Flächensysteme eines p , das nicht 0 oder 1 ist, die Verminderung durch Adjunction anwende. Komme ich dabei zu einem Zerfallen, benütze ich XXVII., komme ich zu $p > 0$ so benütze ich XXVIII., komme ich zu $p = 0$, so benütze ich XXX. oder die letzte Anmerkung unter dem Texte, komme ich zu $p = 1$ (unter dem gemachten Vorbehalte), so benütze ich XXXI., komme ich zu keinem dieser Hindernisse, kann also das Princip fortgesetzt anwenden, so komme

¹ Die Schnittcurven der Flächen $M_2^{2s}(x_i^s)$ sind $n = 4s^2$, $x_i = s^2$ und da sie vom Maximalgeschlechte sind, so ist ihr Geschlecht unter Rücksicht auf die x_i gleich $\left(\frac{4s^3 - 2}{2}\right)^2 - 8 \frac{s^2(s^2 - 1)}{2} = 1$. Diese Curven, das ist also überhaupt alle invarianten Curven, sind elliptisch, womit dem Th. VII. widersprochen wäre.

² Ich bin im Th. XXX. auf meine obigen Theoreme über Curvensysteme übergegangen, aber es ist hier auch leicht möglich, $p = 0$ so zu behandeln wie ich in XXXI. $p = 1$ handle und es finden sich als Typen Systeme von Ebenen, M_2^2 , M_2^3 und M_2^4 mit Doppelpunkten. Solche Typen existiren aber für allgemeine Flächensysteme nicht.

ich von selbst zu Ebenen, M_2^2 , M_2^3 oder M_2^4 und eine gewiss einfache Discussion lässt in den für diese anallagmatischen Transformationen jene des Theoremes XXIII. erkennen.

IV. Beweis.

Derselbe entspricht der für die ebenen Transformationen von mir in Crelles Journal, Bd. 114 gegebenen III. Methode. Es wird der Rang der zu einer Characteristik gehörigen linearen Substitutionen 1) definirt. Es werden äquimultiple Characteristiken als solche definirt, welche nur Singularitätencomplexe n, x_1, \dots, x_σ invariant lassen. Es wird hauptsächlich bewiesen:

Theorem XXXIV. *Wenn in einer Characteristik ein Singularitätencomplex invariant ist, welcher nicht äquimultipel ist, so kann man durch Particularisirung des in ihm enthaltenen Parameters stets einen Complex $p = 0, u \geq 0$ erreichen, oder einen, der sich zu einem solchen ergänzen lässt.*

Man beweist ferner, dass eine Fläche mit $p = 0, u = 0$ (allein in Folge der Singularitäten in den Characteristikpunkten) als Fundamentalfäche einer gegenwärtigen Transformation benützt werden kann und hat dann das Theorem bewiesen (als Umformung von XXXIV):

Theorem XXXV. *Eine nicht äquimultiple periodische Characteristik kann entweder einer Collineation, oder einer Transformation $(a_1^{m-1} b_1^{m-1})$ oder einer Transformation $(a_1^{m-1} b_2^{m-1})(a_2^{m-1} b_1^{m-1})$ oder einer mit $\sigma < 8$ Fundamentalkunkten birational äquivalent gemacht werden.*

Dies ist im Wesen das Haupttheorem XXIII.

Es kann endlich entsprechend der II. Methode in Cr. J. Bd. 114 noch ein V. Beweis gegeben werden, indem man trachtet, überhaupt eine arithmetische Formel für den Periodicitätsindex (beziehungsweise Ausdruck für die Aperiodicität) einer gesetzmässig gebildeten Characteristik aufzustellen durch successive Bildung immer allgemeinerer Classen von Fundamentalsystemen. Hiezu ist es gut, die Substitutionen I) und II) als Definitionen zu verwenden.

§ 3. Die Charakteristiken der Fundamentalsysteme mit a_1^{m-1}, b_1^{m-1}
(I. Th. § 4).

Theorem XXXVI. Die Charakteristik mit $(a_1 b_1)$ ist periodisch und mit demselben Index, sobald die von den übrigen Punkten gebildete Charakteristik $Ch_{\sigma-1}$ in der Ebene genommen periodisch ist und umgekehrt.

Denn indem man für beide Charakteristiken die Substitutionen I) aufschreibt, beweist man durch eine einfache Umformung der Determinante, dass die erste ch. F. gleich der zweiten mal $(x-1)$ ist. Auch durch das Tableau der successiven Transformationen erhellt dasselbe.

Theorem XXXVII. Zwei Charakteristiken Ch_σ mit $(a_1 b_1)$ sind äquivalent, wenn die Charakteristiken $Ch_{\sigma-1}$ äquivalent sind.

Denn ist Q^ν eine Transposition, welche die beiden $Ch_{\sigma-1}$ äquivalent macht, so liefert die Transposition $((a_1 b_1)^{2\nu-2} Q^\nu)$ auf die erste Ch_σ angewandt, eine Transformation $(a_1 b_1)$, wo $Ch_{\sigma-1}$ mit jener der zweiten Ch_σ übereinstimmt, also diese Ch_σ selbst.

Corollar I. Wenn $Ch_{\sigma-1}$ der Collineation äquivalent ist, ist es auch Ch_σ .¹

Corollar II. Wenn Ch_σ in der Punktezah redutibel sein soll, so muss $Ch_{\sigma-1}$ es sein und umgekehrt.

Corollar III. Es gibt so viele typische Charakteristiken mit $(a_1 b_1)$, als es typische Charakteristiken überhaupt in der Ebene gibt. Hieraus folgt:

¹ Zufolge dem in I. Th. § 4 Gesagten beginnen die fundamentalen Substitutionen I) und II) für die gegenwärtigen Fundamentalsystemen wie folgt; wenn mit x, x', ξ, ξ' die Vielfachheiten in a, b bezeichnet werden:

$$n' = mn - \frac{m-1}{2} x - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots, \quad n' = mn - (m-1)\xi - 2a_1 \xi_1 - 2a_2 \xi_2 - \dots,$$

$$x' = (m-1)n - \frac{m-3}{2} x - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots, \quad \xi' = \frac{m-1}{2} n - \frac{m-3}{2} \xi - a_1 \xi_1 - a_2 \xi_2 - \dots,$$

$$x'_1 = 2b_1 n - b_1 x - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \dots, \quad \xi'_1 = b_1 n - b_1 \xi - a_{11} \xi_1 - a_{12} \xi_2 - \dots,$$

$$x'_2 = 2b_2 n - b_2 x - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 - \dots, \quad \xi'_2 = b_2 n - b_2 \xi - a_{21} \xi_1 - a_{22} \xi_2 - \dots$$

Theorem XXXVIII. Die typischen Charakteristiken mit $(a_1^{m-1} b_1^{m-1})$ sind 48 isolirte, welche durch Verbindung von $(a_1^{m-1} b_1^{m-1})$ mit den 48 isolirten Typen $B_9; \dots, \Sigma_2$ der Ebene erhalten werden und die Classen $(a_1^{m-1} b_1^{m-1}), (a_2^{m-1} b_2^{m-1})$.

Corollar I. Die Charakteristiken $(a_1^{m-1} b_1^{m-1}), b_i^2$ in $\dots (b_i^2)^{h_i} = a_{i,i}^2$ sind periodisch für alle Werte von h_i und der Index ist das kleinste Multiplum aller Zahlen $h_i + 1$.

Corollar II. Wenn $Ch_{\sigma-1}$ äquimultipel ist, so hat Ch_σ nur die anallagmatischen Singularitätencomplexe $n, n - 3s, s, \dots s$.¹ und $n, n - 3\bar{s}, \bar{s}, \dots \bar{s}$.

¹ Obzwar für das Typenproblem nicht erforderlich, mögen über die Fundamentalsysteme des § 3 noch folgende Theoreme mitgetheilt sein:

Theorem XXXVIII'. Ist Δ die char. Function der fundamentalen linearen Substitution für die aus den x_1, \dots, x_σ gebildete ebene Charakteristik $Ch_{\sigma-1}, \Delta_{11}$ die 1. Unterdeterminante, so ist die char. Function für b_1 in $a_1, Ch_{\sigma-1}$ (oder x' in $x, Ch_{\sigma-1}$):

$$-(\rho - 1)(\Delta(1 + 2\rho) + \Delta_{11}(\rho^2 + 1 + \rho)).$$

Es sind die fundamentalen Substitutionen vorbereitet zur Berechnung von ρ diese:

$$\rho n = mn - \frac{m-1}{2}x - a_1x_1 - a_2x_2 - \dots,$$

$$\rho x' = (m-1)n - \frac{m-3}{2}x - a_1x_1 - a_2x_2 - \dots,$$

$$\rho x = x'$$

$$\rho x'_1 = 2b_1n - b_1x - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots$$

woraus durch einfache Umformung der obige Werth entsteht.

Theorem XXXVIII'. Die Charakteristiken b_1 in $a_1, Ch_{\sigma-2}$, wo $Ch_{\sigma-2}$ einer der 48 Typen aus der Ebene ist, sind aperiodisch, sobald die Gesamtzahl der Punkte > 7 ist.

Ich beweise nämlich, dass nicht invariante Curven jedes Geschlechtes p da sind. Das Maximalgeschlecht der invarianten Curve $n, n - 3\bar{s}, \bar{s}, \dots, \bar{s}$ ist nämlich

$$\frac{(n-2)^2}{4} - (\sigma-2)\frac{\bar{s}(\bar{s}-1)}{2} - 2\frac{(n-3\bar{s})(n-3\bar{s}-1)}{2} = \frac{-3n^2 + 21\bar{s}n + \sigma\bar{s}^2 + 14n\bar{s} + 4\bar{s}^2}{4}$$

und es muss $5\bar{s} \geq n \geq 3\bar{s}$ sein, sodass die Einsetzung des günstigsten Werthes $n = 3\bar{s}$

§ 4. Die Charakteristiken von $a_1^{m-1}, a_2^{m-1}; b_1^{m-1}, b_2^{m-1}$.

Theorem XXXIX. Die Charakteristiken $(a_1 b_2), (a_2 b_1), b_i$ in ... $b_i^{h_i} = a_i$, können in der Ordnung reducirt werden, wenn nicht alle $i_\lambda = i$ sind.

Die entsprechende Transposition für $(a_1 b_1), (a_2, b_2), \dots$ ist möglich zufolge Theorem XXXVII. und ändert sich aber nicht durch die Vertauschung von a_1, a_2 .

Theorem XL. Die Charakteristik $(a_1 b_2), (a_2 b_1), b_i$ in ... $b_i^{h_i} = a_i$ hat den Index $2N$, wo N das kleinste Multiplum aller Zahlen $h_i + 1$.

Denn Collineation tritt nach $2N$ Anwendungen ein wegen XXXVIII. und das involutorische Paar a_1, a_2 ist verschwunden.

Theorem XLI. Die Charakteristiken $(a_1 b_1), b_2$ in $a_2, (a_i b_i)$ sind aperiodisch für $m > 17$, $(a_1 b_1), b_2$ in b'_2 in $a_2, (a_i b_i)$ für $m > 5$.

Denn der bezügliche Satz ist Preisschrift IV. § 7 XII. bewiesen und wie in der Th. der cub. Transf. gilt, dass wenn $Ch(a_2, \dots; b_2, \dots)$ reductibel ist, auch $(a_1 b_1)Ch(a_2, \dots, b_2, \dots)$ reductibel ist.

Für $m = 5$ sind periodisch die den cubischen ebenen Charakteristiken mit $(a_1 b), (a b_1)$ entsprechenden, für $m = 7$ nur $(a_i b_i), i = 3, \dots, 8$ und $(a_i b_i), i = 3, \dots, 7, b_8$ in a_8 .

liefert $\frac{-(2\sigma - 13)\xi^2 + 4\xi + 4}{4}$ also für $\sigma = 8$ den Werth $\frac{-3\xi^2 + 4\xi - 4}{4}$, welcher nur für $\xi = 1$ den Werth 1 annimmt.

Es sind also nur zu untersuchen 1. die cubischen Transformationen b_1 in a_1 2. die Transformationen 5. Ordnung, welche aber ebenfalls eigentlich unter die Fundamentalsysteme des § 4 gehört.

Die übrigen Charakteristiken des Fundamentalsystemes a^{n-1} können dadurch erhalten werden, dass in einer ebenen Charakteristik eine Coincidenz $(a_k \beta_j)$ in zwei Theile gespalten wird durch Einfügung der beiden Punkte a, b , nämlich in $(a_k b), (a \beta_j)$. Die linearen Substitutionen II) lehren dann, dass $n - 3\xi = \xi$, also $n = 4\xi$, $\xi = \xi$ sein muss; die Charakteristik ist äquimultipel, wenn die ebene Charakteristik es war. Es können also nur die ebenen Charakteristiken mit 6 Punkten räumliche periodische Ch. liefern.

Macht man aber diesen Ersetzungsprocess an einer nicht typischen Charakteristik, so kann dennoch die räumliche Charakteristik typisch werden.

Theorem XLII. Die Charakteristiken b_1 in a_1 , b_2 in a_2 , $(a_i b_i)$ sind aperiodisch für $m > 3$, doch $(a_1 b_2)$, b_1 in b'_1 in a_2 , $(a_i b_i)$; $(a_1 b_2)$, b_1 in a_2 , $(a_i b_i)$ für $m > 5$.

Aus den linearen Substitutionen¹ folgt für das Geschlecht der invarianten Curven, wenn man mit σ die Anzahl der Punkte im Cyclus von a_1 bezeichnet,

$$\frac{(n-2)^2}{4} - m \frac{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}-1)}{2} - \frac{\sigma}{2} \left[\frac{(n-2)^2}{4} - \frac{(n-2)(2\mathfrak{s}-1)}{2} \right]$$

wo \mathfrak{s} die Vielfachheit in den $(a_i b_i)$ ist; wird nun das Maximum dieses Werthes bestimmt, so ergibt sich, dass es für die Werthe m des Theoremes nicht > 1 werden kann.

Theorem XLIII. Die Charakteristiken $(a_1 b_3)(a_3 b_1)(a_4 b_2)(a_2 b_4)(a_i b_i)$ und $(a_1 b_3)(a_3 b_2)(a_2 b_4)(a_4 b_1)$ sind äquimultipel und daher aperiodisch für $m > 5$.

Für die 1. z. B. hat man

$$0 = \frac{m-1}{2} n - \frac{m-3}{2} x - \frac{m-1}{2} y - 2x_1 - x_2 - \dots,$$

$$0 = \frac{m-1}{2} n - \frac{m-1}{2} x - \frac{m-3}{2} y - x_1 - 2x_2 - \dots,$$

$$x = n - x - y - x_1, \quad x_i = n - x - y - x_i,$$

$$y = n - x - y - x_2$$

woraus $x = y = x_1 = x_2 = x_i$. Ebenso für die 2. Charakteristik.

¹ Die fundamentalen linearen Substitutionen I) und II) für die Fundamentalsysteme des § 4 beginnen:

$$n' = mn - \frac{m-1}{2} x - \frac{m-1}{2} y - x_1 - x_2 - \dots,$$

$$\text{I) } x' = (m-1)n - \frac{m-3}{2} x - \frac{m-1}{2} y - x_1 - x_2 - \dots,$$

$$y' = (m-1)n - \frac{m-1}{2} x - \frac{m-3}{2} y - x_1 - x_2 - \dots,$$

$$n' = mn - (m-1)x - (m-1)y - 2x_1 - 2x_2 - \dots,$$

$$\text{II) } x' = \frac{m-1}{2} n - \frac{m-3}{2} x - \frac{m-1}{2} y - x_1 - x_2 - \dots,$$

$$y' = \frac{m-1}{2} n - \frac{m-1}{2} x - \frac{m-3}{2} y - x_1 - x_2 - \dots$$

Theorem XLIV. *Wenn in einer Characteristik mit lauter Coincidenzen die Punkte a_1b_1, a_2b_2 in zwei Cyclen mit mindestens einer Ordnung > 2 oder in einen Cyclus > 4 eintreten, so ist dieselbe reductibel auf niederen Grad.*

Die Transposition $(a_1b_1a_2b_2)^3$ leistet dies jedesmal. Ist ein Cyclus von der Ordnung 3, so entsteht in der neuen Characteristik b_1 in b'_1 in a_1 mit $(b_2a_3)(b_3a_2)$, was aperiodisch ist für $m > 3$, oder wenn ein Cyclus mit Ordnung > 3 vorkommt, b_2 in a_3 , b_i in a_2 , wo i auch 3 sein kann. Auch diese Characteristik ist aperiodisch für $m > 3$. Indem man dies übrigens nur für $i = 3$ voraussetzt (direct beweist), kann man successive die Ordnung des Cyclus von 4 auf 5, 6, ... erhöhen und muss bei jedem einzelnen Schritte beweisen, dass für die betreffende Ordnung des Cyclus die nicht erweiterte Characteristik aperiodisch ist für $m > 5$, die wie zuletzt erweiterte — b_2 in a_3 , b_i in a_2 — aperiodisch ist schon für $m > 3$. Hiemit wird vereint, dass die Erweiterungen aperiodischer Characteristiken es a fortiori sind und dass Characteristiken mit (a_ib_k) statt (a_ib_i) als letztem Theile selben Index wie diese haben. So kommt das allgemeine

Theorem XLV. *Für $m > 5$ sind alle Characteristiken dieses Fundamentalsystemes aperiodisch mit Ausnahme der Characteristiken $(a_1b_2)(a_2b_1)$ oder $(a_1b_1) \dots$, welche im Typentheoreme auftreten.*

§ 5. Die periodischen Characteristiken mit 6, 7 Punkten.

Es sind die 9 Fundamentalsysteme aus Th. LXX. der Reihe nach zu untersuchen. Die cubische Transformation habe ich im American Journal Bd. 19 (*Theorie der periodischen cubischen Transformationen*, Cap. II) erledigt; ich gelange also zu

$$\text{II. } Q^5 = (b_1^4 b_2^4 b_3^2 b_4^2 b_5^2 b_6^2)^5.$$

Als nicht reductibel auf Q^3 erweisen sich die folgenden Characteristiken: 1. b_1 in $a_2, (a_2b_3), (a_3b_2), (a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6)$, 2. b_1 in $a_1, (a_2b_3), (a_3b_2), (a_4b_5), (a_5b_4), (a_6b_6)$, 3. b_1 in $a_2, (a_1b_2), (a_ib_i)$, 4. $(b_1a_2), (a_1b_3), (a_3b_2), (a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6)$, 5. $(b_1a_2), (a_1b_3), b_2$ in $a_3, (a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6)$, 6. b_1 in $a_2, (a_1b_3), (a_3b_2), (a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6)$, 7. $(a_1b_3), (a_3b_1)$,

$(a_2b_4), (a_4b_2), (a_5b_5), (a_6b_6)$, 8. $(a_1b_3), (a_3b_1), (a_2b_4), (a_4b_2), (a_5b_5), b_6$ in a_6 ,
 9. $(a_1b_3), b_1$ in $a_3, (a_2b_4), (a_4b_2), (a_5b_5), (a_6b_6)$, 10. $(b_1a_2), (a_1b_3), (a_3b_2),$
 $(a_4b_4), (a_5b_5), b_6$ in a_6 , 11. $(a_1b_3), (a_4b_1), (a_2b_4), (a_3b_2), (a_5b_5), (a_6b_6)$,
 12. $(a_1b_3), (a_4b_1), (a_2b_4), b_2$ in $a_3, (a_5b_5), (a_6b_6)$, 13. $(a_1b_3), (a_3b_2), (a_2b_4),$
 $(a_4b_1), (a_5b_5), b_6$ in a_6 .

Theorem XLVI. Die Charakteristiken $n. 7, 11$ haben die Indices $4, 4$ und sind typisch.

Die T^i sind resp. $(2, 4, 4, 2, 2, 2)^5, (2, 2, 2, 2, 4, 4)^5, (4, 2, 2, 4, 2, 2)^5, (.)^1$,
 und $(2, 4, 2, 4, 2, 2)^5, (2, 2, 2, 2, 4, 4)^5, (4, 2, 4, 2, 2, 2)^5, (.)^1$, den typischen Character beweisen die Transpositionen.

Theorem XLVII. Die Charakteristiken 1. 2. 4. 6. 12. sind äquivalent mit Charakteristiken des § 3.

$(a_2a_3a_4a_5)^3$ liefert jeweilen in dem neuen Raume $(A_6^4B_6^4)$ gemäss § 3.

Theorem XLVIII. $n. 3.$ ist reductibel auf 6 Punkte.

Denn die Ebene $a_1b_1a_2$ ist invariant und wird mit $(—)^3$ über $a_1b_1a_2z$ transponirt, so wird z in dem neuen Raume invariant.

Theorem XLIX. Die Charakteristiken $n. 10.$ und $5.$ sind äquivalent und vom Index 10.

Die T^i sind für $n. 5$: $(4, 2, 4, ., 2, 2, 2)^5, (4, 4, 6, 4, 2, 2, 2)^7,$
 $(6, 2, 6, 6, 4, 4, 4)^9, (4, 4, 8, 6, 6, 6, 6)^{11}, (8, 8, 8, 8, 8, 8)^{15},$
 $(4, 6, 4, 8, 6, 6, 6)^{11}, (4, 4, 2, 4, 6, 6, 6)^9, (2, 6, 2, 6, 4, 4, 4)^7,$
 $(4, 4, ., 2, 2, 2, 2)^5, (.)^1$.

Theorem L. $n. 8.$ und $n. 13.$ sind vom Index 8. und typisch. $n. 9.$ ist äquivalent $n. 8.$

Die T^i für $n. 8.$ sind: $(2, 4, 2, 4, 2, 2, .)^5, (2, 4, 2, 4, 4, 6, 2)^7,$
 $(6, 8, 6, 8, 6, 8, 6)^{13}, (6, 6, 6, 6, 8, 8, 8)^{13}, (8, 6, 8, 6, 6, 6, 8)^{13},$
 $(4, 2, 4, 2, 4, 2, 6)^7, (4, 2, 4, 2, 2, ., 2)^5, (.)^1$. — $(a_1a_2a_4a_5)^3$ reducirt $n.$
 9. auf $n. 8.$ ¹

¹ Die Beweise sind jedesmal nach meiner Theorie Crelles Journal Bd. 114 zu vervollständigen.

Die typischen Characteristiken der Ordnung 5 sind also:

$(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_4 b_2), (a_2 b_4), (a_5 b_6), (a_6 b_5)$	Index 4,
$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_6), (a_6 b_5)$	» 4,
$(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_4 b_2), (a_2 b_4), (a_5 b_6), b_6 \text{ in } a_6$	» 8,
$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_6), b_6 \text{ in } a_6$	» 8,
$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_1), (a_4 b_4), (a_5 b_6), b_6 \text{ in } a_6$	» 10.

$$\text{III. } Q^7 = (f^6 d_1^4 d_2^4 d_3^4 b_1^2 b_2^2 b_3^2)^7.$$

$(f d_1 d_2 d_3)^3$ liefert $(f'^2 d_1'^2 d_2'^2 d_3'^2)^3$ und reducirt also alle Characteristiken mit $(ff')(d_i d_k')$ oder $(d_i f')(f d_k')$.

$(f d_1 d_2 b_1)^3$ liefert $(f'^4 d_1'^2 d_2'^2 d_3'^2 b_1'^2 b_2'^2)^5$, reducirt also die übrigen mit Ausnahme von

1. $(d_1 f'), (f b_2'), (d_2 b_3'), (d_3 b_1'), (b_1 d_2'), (b_2 d_3'), (b_3 d_1'),$
2. $(b_1 f'), (f b_1'), (d_1 b_3'), (d_2 d_2'), (d_3 b_2'), (b_2 d_3'), (b_3 d_1').$

Theorem LI. *n. 1. ist vom Index 6 und typisch, n. 2. vom Index 4 und typisch.*

Die T^i von n. 1. sind: $(6, 2, 2, 2, 4, 4, 4)^7, (6, 4, 4, 8, 6, 6, 6)^{11}, (4, 4, 8, 6, 6, 6, 6)^{11}, (4, 8, 6, 4, 6, 6, 6)^{11}, (4, 6, 4, 4, 2, 2, 2)^7, (.)^1$. Die T^i von n. 2. sind $(6, 2, 2, 4, 2, 4, 4)^7, (8, 6, 8, 6, 6, 6, 8)^{13}, (2, 6, 4, 4, 4, 2, 2)^7, (.)^1$.

$$\text{IV. } Q^7 = (d_1^4 \dots d_6^4)^7.$$

$(d_i d_k d_l d_m)^3$ reducirt stets mit Ausnahme von

- n. 1. $(d_i d_i'), \quad i = 1 \dots 6,$
- n. 2. $(d_i d_i'), d'_6 \text{ in } d_6, \quad i = 1 \dots 5.$

Theorem LII. *n. 2. ist vom Index 6 und typisch.*

Die T^i sind $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)^7, (4, 4, 4, 4, 4, 8, 4)^9, (8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)^{15}, (4, 4, 4, 4, 4, 4, 8)^9, (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)^7, (.)^1$.

$$\text{V. } Q^9 = (h^5 d_1^4 \dots d_6^4)^9.$$

$(h d_1 d_2 d_3)^3$ liefert $(h'^6 d_1'^4 d_2'^4 d_3'^4 d_4'^2 d_5'^2 d_6'^2)^7$, reducirt also, wenn (d, h') , $(h d_1)$, $(d_1 d_1')$, $(d_m d_1')$ stattfindet, was immer eintritt.

$$\text{VI. } Q^9 = (f_1^6 f_2^6 f_3^6 d_1^4 d_2^4 d_3^4 b^2)^9.$$

$(h f_1 f_2 d_1)^3$ liefert $(d_2'^4 d_3'^4 f_1'^2 f_2'^2 f_3'^2 d_1'^2)^7$ und reducirt daher stets, wie eine Discussion der Coincidenzen beweist.

$$\text{VII. } Q^{11} = (h^5 f_1^6 f_2^6 f_3^6 f_4^6 d_1^4 d_2^4)^{11}.$$

$(h f_1 f_2 f_3)^3$ liefert $(h'^9 f_1'^4 f_2'^4 f_3'^4 f_4'^2 d_1'^2 d_2'^2)^7$ reducirt also stets, da auch im Falle $(h d_1)$, (d, h') stets $(h f_i f_k f_l)^3$ so gewählt werden kann, dass zwei f'^4 eintreten.

$$\text{VIII. } Q^{12} = (h_1^8 h_2^8 h_3^8 f_1^6 f_2^6 f_3^6 f_4^6)^{12}.$$

$(h_1 h_2 h_3 f_1)^3$ liefert $(h_1'^6 h_2'^6 h_3'^6 f_1'^2 f_2'^2 f_3'^2 f_4'^4)^9$, reducirt stets.

$$\text{IX. } Q^{15} = (h_1^8 h_2^8 h_3^8 h_4^8 h_5^8 h_6^8)^{15}.$$

$(h_1 h_2 h_3 h_4)^3$ reducirt stets mit Ausnahme von $(h_i h_i')$, $i = 1, \dots, 7$.

Indem diese Resultate zusammengesetzt und in das Theorem XXIII. eingeführt werden, entsteht das Haupttheorem:

Theorem LIII. *Alle periodischen Charakteristiken von Fundamentalsystemen ohne Fundamentalcurven 1. Art sind birational äquivalent entweder:*

- | | |
|---|---------------------|
| 1. einer homographischen Vertauschung unter einer Anzahl Punkten. | |
| 2. einer Charakteristik mit $(a^{n-1} b^{n-1})$ und typischem ternären Reste. | |
| 3. einer Charakteristik mit $(a_1^{n-1} b_2^{n-1})$, $(b_1^{n-1} a_2^{n-1})$, b_i in $\dots b_i' = a_i$. | |
| 4. $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4), (a_4 b_1)$, | 3. Ordnung Index 4. |
| 5. $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in a_4 , | 3. " " 6. |
| 6. $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in b_1' in a_4 , | 3. " " 10. |
| 7. $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in b_1' in b_1'' in a_4 . | 3. " " 18. |
| 8. $(a_1 b_2), (a_2 b_3)$, b_4 in a_3 , b_1 in a_4 , | 3. " " 8. |
| 9. $(a_1 b_2), (a_2 b_3)$, b_4 in a_3 , b_1 in b_1' in a_4 , | 3. " " 14. |
| 10. $(a_1 b_2)$, b_3 in a_2 , b_4 in a_3 , b_1 in a_4 , | 3. " " 30. |
| 11. $(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_4 b_2), (a_2 b_4), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$, | 5. " " 4. |

12. $(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_5), (a_6 b_6),$	5. Ordnung	Index	4.
13. $(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_2 b_4), (a_4 b_2), (a_5 b_5), b_6$ in $a_6,$	5. »	»	8.
14. $(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_5), b_6$ in $a_6,$	5. »	»	8.
15. $(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_1), (a_4 b_4), (a_5 b_5), b_6$ in $a_6,$	5. »	»	10.
16. $(d_i d'_i), i = 1, \dots, 6,$	7. »	»	2.
17. $(d_i d'_i), d_6$ in $a_6, i = 1, \dots, 5,$	7. »	»	6.
18. $(d_1 f'), (f b'_2), (d_2 b'_3), (d_3 b'_1), (b_1 d'_2), (b_2 d'_3), (b_3 d'_1),$	7. »	»	6.
19. $(b_1 f'), (f b'_1), (d_1 b'_3), (d_2 d'_2), (d_3 b'_2), (b_2 d'_3), (b_3 d'_1),$	7. »	»	4.
20. $(f_i f'_i), i = 1, \dots, 7,$	15. »	»	2.

III. THEIL.

Die periodischen Transformationen. Construction der Typen.

§ 1. *Reduction auf die Typen.*

In den III ersten Beweisen des II. Theiles § 2. kann die Reihenfolge der Theoreme auch für wirklich existirende Transformationen ausgesprochen werden. Insbesondere gilt die Existenz des invarianten ∞^2 -Systemes rationaler oder elliptischer Curven. Über die Theoreme der Äquivalenz letzterer ist jedoch dieselbe Einschränkung zu machen, von welcher ich noch in umfangreicherer Geltung zu sprechen haben werde, dass sie nämlich beim Übergange vom Arithmetischen zum Algebraischen nur insofern gelten, als die 4 höchsten Fundamentalpunkte, welche zur Verminderung der Ordnung nöthig sind, thatsächlich von den übrigen trennbare sind, also gewiss wohl dann, wenn überhaupt alle Punkte rational bekannt sind.

Indessen kann auf folgende Weise die allgemeine Giltigkeit des Äquivalenztheoremes für die Transformationen erschlossen werden. Wenn in einer existirenden periodischen Transformation mehrere Punkte der Characteristik gemeinsam durch eine algebraische Gleichung gegeben sein sollen, so müssen diese Punkte sicherlich für die Characteristik dieselbe Bedeutung haben. Ich behaupte:

Lemma. Wie immer man einen der 19 Typen des III. Theiles durch eine Transposition überträgt, es werden stets in der erhaltenen Transformation die zur Transposition nöthigen Punkte sich so gegen die Characteristik verhalten, dass sie in Folge dessen von den übrigen rational trennbar sein müssen.

Der ausführliche Beweis dieser Angabe wird geführt, indem man die 19 Typen Q einzeln durchgeht und auf jeden die algebraische Transposition P anwendet mit Berücksichtigung der wesentlich verschiedenen Lagen, welche die Fundamentalpunkte von P zu der Characteristik Q haben können. Auf Grund des Lemmas kann nun ausgesprochen werden:

Theorem I. *Alle periodischen Transformationen ohne Fundamentaleurven 1. Art sind äquivalent entweder:*

1. *einer Collineation.*
2. *einer Transformation mit $(a^{n-1} b^{n-1})$ nebst einer Characteristik der a_i, b_i , welche zu den 27 construirbaren ebenen Typen gehört (Cr. Journal Bd. 114).*
3. *einer Transformation mit $(a_1^{n-1} b_1^{n-1}), (a_2^{n-1} b_2^{n-1}), b_i$ in $\dots b_i^h = a_i$.*
4. *einer Transformation mit $(a_1^{n-1} b_2^{n-1}), (a_2^{n-1} b_1^{n-1}), b_i$ in $\dots b_i^h = a_i$.*
5. *einer Transformation mit weniger als 8 Fundamentalpunkten.*

§ 2. *Drei Constructionsmethoden. Die Transformationen mit $(a^{n-1} b^{n-1})$.*

1. Wenn eine abbildbare Fläche durch Q invariant ist,¹ so erhält sie eine Verwandlung ihrer Punkte unter sich aufgeprägt, deren Abbildung auf die Ebene aus der Natur von Q bestimmbar ist. Umgekehrt liefert diese a priori construirte Transformation in der Ebene die Verwandtschaft in der Fläche und diese bestimmt die Raumtransformation Q . In dieser Art sollen hauptsächlich die M_2^2 und die M_2^n mit a^{n-1} angewendet werden.

Auf Grund des in meiner Abhandlung über die cubische Reciprokaltransformation² gegebenen Theoremes kann ich aussprechen:

¹ Dies ist meine in den Acta Mathematica, Bd. 19 angewendete Methode aus Comptes Rendus 1885, 5 janvier.

² Am. Journ. of Math. XIX.

Theorem II. *Die Theorie der gegenwärtigen Charakteristiken ist auch in Hinsicht auf Äquivalenz identisch mit der Theorie jener ebenen Charakteristiken 5. Ordnung, welche zwei Paare Fundamentalpunkte $(e_1 e'_1)(e_2 e'_2)$ oder $(e_1 e'_2)(e_2 e'_1)$ gemeinsam coincident haben, und der aus diesen zusammengesetzten.*

Ich denke mir nämlich durch die sämtlichen σ (auch > 9) Punkte der Charakteristik eine Fläche 2. Ordnung gehend, welche in sich transformirt wird und kann dann die Projection der in M_2^2 entstehenden Verwandlung aus einem Punkte vornehmen.

2. Die Parameterdarstellung der durch Q invarianten Curven¹ bietet eine 2. Methode. Um die Anwendung FUCHS'scher Functionen oder auch die von CLEBSCH der Raumeurve adjungirten Integrale zu vermeiden, beziehe man M_1^n eindeutig auf eine ebene Curve C_n . Die Reihe J_n^3 auf M_1^n , in welcher die R_2 des R_3 schneiden, gibt als Bild eine Reihe J_n^3 auf C_n . Wenn es nun möglich ist, eine Matrix

$$\begin{array}{c} m, a_1, \dots, a_\sigma, \\ - a_1, a_{11}, \dots, a_{1\sigma}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ - a_{11}, a_{\sigma 1}, \dots, a_{\sigma\sigma} \end{array}$$

eines Fundamentalsystemes von oben I. Theil zu finden, durch welches M_1^n in sich transformirt wird, so sei $I_i^{(1)} + \dots + I_i^{(n)} \equiv K_i$ ($i = 1, \dots, p$) das ABEL'sche Theorem für eine Gruppe von J_n^3 auf C_n , und also $\equiv K_i$ die rechte Seite des Schnittpunktheorems für eine Gruppe, die Bild einer Schnittes von M_1^n mit M_2^m ist, ferner $A_1^{(i)}, \dots, A_p^{(i)}$ die Integralsummen in den Punkt a_i -tupeln, welche bezüglich den σ resp. $a'_1, \dots, a'_i, \dots, a'_\sigma$ -fachen Punkten von M_1^n auf C_n entsprechen. Dann lässt sich von Congruenz 3) auf p. 139 der Acta Math. Bd. 19 an die dortige Rechnung genau hierher übertragen und führt zu $p\sigma$ Congruenzen unter den $p\sigma$ Grössen A , wie l. c. 6). Auch die Rechnung auf p. 141 ist übertragbar

¹ Auch schon für die Flächen konnte statt der geometrischen Abbildung die Parameterberechnung für die Transformation verwendet werden, sogar für Flächen $p > 0$; doch ist wenigstens für $n > 3$ die Parameterdarstellung der M_2^n noch zu wenig vorgeschritten.

und liefert eine Relation unter den Wurzeln der WEBER'schen Gleichung für principale Transformation der \mathcal{S} und meiner Determinante Δ_{xx} .

3. Besonders wichtig sind auch hier die Berechnungen von Charakteristiken, welche eine M_1^4 mit Spitze und Schnittpunkttheorem $u_1 + \dots + u_4 = 0$ in sich transformiren oder eine M_1^4 mit $p=1$. Der Calcul ist wenig von Acta Math. Bd. 19, p. 135—137 verschieden und liefert insbesondere:

Theorem III. *Die Determinante, welche über die Existenz einer Charakteristik des II. Theiles auf M_1^4 mit Spitze entscheidet, ist bis auf einen Factor $x-1$ proportional der Determinante für die fundamentale Substitution der Charakteristik. Wenn eine M_1^4 mit Spitze invariant ist, trägt sie denselben Index wie der Index der ganzen räumlichen Transformation.*

4. Es sollen nun die Transformationen mit $(ab)^{n-1}$ behandelt werden.

Theorem IV. *Wenn eine isolirte typische Charakteristik aus II. Th. LIII. n. 1 existirt, enthält sie stets eine invariante M_2^2 , die nicht zerfällt.*

M_2^2 könnte nur in zwei Ebenen durch (ab) zerfallen, aber keiner der 27 ebenen Typen gestattet ein invariantes Geradenpaar. σ ist bezüglich 7, 8, 9.

Die Geraden durch (ab) werden unter einander, und also die beiden Erzeugenden der M_2^2 durch O in sich transformirt oder vertauscht. Daher kann wie folgt endgiltig construirt werden: Durch zwei Doppelpunkte $f_1 f_2$ oder ein Paar involutorischer Punkte $i_1 i_2$ eines ebenen Typus ziehe man M_2^2 und projicire aus dem Schnittpunkte O zweier Erzeugenden durch $f_1 f_2$ oder $i_1 i_2$ den Typus auf M_2^2 , dann entsteht dort die Charakteristik des räumlichen Typus 3., 5. bis 33. Ordnung und mit O als $(a_1 b_1)$.

Wie in § 10 des Cap. II. meiner Abhandlung aus dem Am. Journ.¹ folgt nun, dass für die 7-punktigen Typen Q der Index des M_2^2 -Netzes derjenige Index ist, mit welchem die involutorischen Paare der XLIII₂, welche über Q und einem seiner Doppelpunkte construirt ist, durch Q unter einander transformirt werden. Ferner habe ich dort die Varietäten für die Transformationen 3. Ordnung bereits gegeben.

¹ Am. Journ. of Math. 1897: *Theorie der periodischen cubischen Transformationen im R_3 .*

Theorem V. Für $(a_1 b_1)$, Γ_6 und $(a_1 b_1)$, Δ_3 gibt es 3, 2 Varietäten, für $(a_1 b_1)$, Γ'_6 ; $(a_1 b_1)$, Γ''_6 ; $(a_1 b_2)$, E_4 ; $(a_1 b_1)$, Θ_2 ; $(a_1 b_1)$, Γ_{10} ; $(a_1 b_1)$, Γ_{12} ; $(a_1 b_1)$, Δ_8 ; $(a_1 b_1)$, E_6 ; $(a_1 b_1)$, E'_6 ; $(a_1 b_1)$, E''_6 ; $(a_2 b_1)$, Z_5 ; $(a_1 b_1)$, H_6 ; $(a_1 b_1)$, H'_6 ; $(a_1 b_1)$, I_4 ; $(a_1 b_1)$, N_3 ; $(a_1 b_1)$, Σ_2 ; resp. 6, 6, 4, 5, 4, 5, 5, 5, 4, 5, 3, 4, 3, 4 Varietäten.

Diese hängen von dem Vorhandensein des $f_1 f_2$ - oder $i_1 i_2$ -Paares in ebenen Typus ab und über ihre M_1^4 wird aus den in der Preisschrift beschriebenen invarianten C_3 heraus entschieden.¹

Theorem VI. Auf einer Curve M_1^4 mit Spitze, für welche $\Sigma u = a_1$ das Schnittpunktttheorem, hat man nur die für eine ebene C_3^3 in *Acta Math.* Bd. 19, p. 136 berechneten Parameter der b_1, \dots, b_σ mit $(a_1 b_1)$ zu verbinden, um die Charakteristik in R_3 zu haben.

Hierbei ist $(a_1 b_1)$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} -4 \frac{D}{B} + (m-1)a_1 + \dots + \alpha_\sigma b_\sigma &= m a_1, \\ -\frac{D}{B} + \left(m - \frac{C}{B}\right)a_1 + \dots + \alpha_{1\sigma} b_\sigma &= \frac{m-1}{2} a_1, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

zu berechnen, wo die für die Fundamentalfläche von $a_1 \dots a_\sigma$ geltenden nicht aufgeschrieben sind. Die letzten σ dieser Gleichungen stimmen aber im Wesen mit den für die Ebene geltenden überein.

Dasselbe Theorem gilt für eine invariante Curve M_1^4 $p=1$, wenn auf derselben als Schnittpunktttheorem $\Sigma u \equiv a_1$ genommen wird.

5. Die 3. Methode wird im V. Theile §§ 4, 5, 6 angewendet werden.

§ 3. Die typischen Transformationen mit $(a_1^{m-1} b_1^{m-1})$, $(a_2^{m-1} b_2^{m-1})$
oder $(a_1^{m-1} b_2^{m-1})$, $(a_2^{m-1} b_1^{m-1})$.

Theorem VII. Jede Transformation $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_i in $\dots b_i^h = a_i$ ($i=3, \dots, m-1$) ist mit einer als invariant vorausgesetzten M_2^2 construierbar.

¹ Cf. wegen der Typenbenennung Cr. Journal, Bd. 114.

Denn indem man die erste Methode des vorigen Paragraphen anwendet, kann man immer zwei Doppelpunkte $f_1 f_2$ in der Ebene finden, welche mit $(a_2 b_2)$ daselbst nicht alineirt sind. Construiert man über ihnen die M_2^2 , so erhält man die Transformation.

Wenn $h = 1$, gibt es eine 2. Varietät. Man kann dann ein mit (aa') nicht alineirtes Paar $i_1 i_2$ in der Ebene finden, über diesem die Erzeugenden von M_2^2 errichten und construiren.

Theorem VIII. *Jede Transformation aus VII. ist auch mit einer als invariant vorausgesetzten M_1^4 mit Spitze construierbar.*

Ich habe Preisschrift IV, § 7, bewiesen, dass jede JONQUIÈRES'sche Transformation (ab) mit invarianter C_3^3 construierbar ist; hienach kann VI. angewendet werden.

Theorem IX. *Die Transformationen $(a_1 b_1), (a_2 b_2), (a_3 b_3), b_i$ in $\dots b_i^h = a_i$ ($i = 4, \dots, m + 1$) sind nur mit einer invarianten M_2^2 construierbar, welche ein Kegel ist, wenn $h > 1$.*

Denn in der ebenen Transformation kann man für $h > 1$ weder $i_1 i_2$ noch ein Paar $f_1 f_2$ finden ohne Alineation mit (ab) , weil aa_3 schon ein Doppelstral ist. Auf dem 2. Doppelstrale wird es einen Doppelpunkt geben, der mit seinem seitlichen, unendlich nahen Doppelpunkte als $f_1 f_2$ genommen werden kann.

Für $h = 1$ gibt es eine Varietät mit Hyperboloid, wo die Erzeugenden durch $(a_1 b_1)$ involutorisch vertauscht werden. Für die M_1^4 gilt VIII. auch hier.¹

Theorem X. *Die allgemeinste Form der Transformationen $(a_1 b_1), (a_2 b_2)$ kann mittelst einer invarianten $M_2^n(a_1^{n-1} b_2^{n-1})$ construiert werden.*

Denn $x_1 = n - 1, x_2 = n - 1, x_3 = 1, \dots, x_\sigma = 1$ ist anallagmatisch und in dem linearen Systeme aller solcher M_2^n , welche a_1^{n-1}, a_2^{n-1} und alle Punkte der Charakteristik enthalten, wird es stets eine invariante M_2^n geben, welche nicht zerfällt. Dann wird wie für M_2^2 construiert. Eine Gerade der Ebene wird von a_1 aus in eine $M_1^n a_1^{n-1}$ projicirt, diese

¹ Die Transformation $(a_1 b_1), (a_2 b_2)$ existirt, wenn $(a_3 b_3), (a_4 b_4)$ vorhanden und $m > 3$, nicht mit invarianter M_2^2 .

in eine $M_1^{mn-(m-1)(n-1)}$ durch $a_1^{\frac{m-3}{2}+n-1}$ verwandelt und diese von a_1 herabprojicirt. Hieraus: Man construire in der Ebene die Transformation $Q = (ab), \dots$, nehme in einer Geraden über (aa') zwei Punkte $a_1 a_2$ als $n-1$ -fache Punkte einer M_2^n und Sorge dafür, dass die Geraden derselben, welche von $(a_1 b_1)$ ausgehen, die Ebene in einem oder mehreren Cyclen der Transformation schneiden. Dann liefert die Q projicirt auf M_2^n eine Verwandlung, welche die Raumtransformation vollkommen bestimmt.

Theorem XI. Die Transformation $(a_1 b_2), (a_2 b_1), b_i$ in $\dots b_i^h = a_i$ sowie $(a_1 b_2), (a_2 b_1), b_i$ in $\dots b_i^h = a_i$ ($i = 4, \dots, \sigma$), $(a_3 b_3)$ existirt stets mit einer invarianten M_2^2 .

Beweis wie für $m = 3$ in Am. Journal of Math. 1897. Die Projection aus einem gewöhnlichen Doppelpunkte O auf M_2^2 liefert

$$((e_1^{m-1} e_2'^{m-1})(e_2^{m-1} e_1'^{m-1})(e_3^{m-1} e_4'^{m-1})(e_4^{m-1} e_3'^{m-1}), e_i^2 \dots)^{2m-1},$$

deren Transposition durch $(e_1 e_2 e_3)^2$ gibt

$$(E_3 \text{ in } E_3, (E_1 E_2'), (E_2 E_1'), (E_4^{m-2} E_3'^{m-2}), \dots)^{m-1}.$$

Wenn $h > 1$, muss also $E_2' = E_1$, $E_1' = E_2$ sein. Die Construction ist vollendet mit jener einer ebenen Transformation von Jonquières, ihrer Transposition und der Errichtung einer M_2^2 . Für die 2. Transformation erhält man $(E_5 E_6')$, also falls nicht E_1, E_2 unendlich nahe sind, nothwendig auch $(E_6 E_5')$. $E_1 E_2$ in unendlicher Nähe bedeutet aber die Kegel- fläche. Für $h = 1$ ist eine 2. Varietät mit $E_1 = E_1', E_2 = E_2'$ zulässig, wie l. c.

Theorem XII. Die allgemeinste Form von $(a_1 b_2), (a_2 b_1)$ kann mittelst einer invarianten $M_2^n(a_1^{n-1} a_2^{n-1})$ construirt werden.

Denn wie in X. kann man stets eine solche M_2^n für hinreichend grosses n finden. Eine Gerade der Ebene wird dann von a_1 aus in eine $M_1^n(a_1^{n-1})$ projicirt, diese in $M_1^{m+n} \left(b_1^{\frac{n-1}{2} + \frac{m+1}{2}} b_2^{\frac{m-1}{2}} \dots \right)$ verwandelt und diese von a_1 aus in eine $M_1^{\frac{m-1}{2} + n} \left(b_2^{\frac{m-1}{2} + n-1} \dots \right)$ herabprojicirt, welche ausser durch die Punkte $b_3 \dots b_\sigma$ durch weitere $2n-2$ Punkte geht, die Schnittpunkte

der Bildebene mit den durch a_1 gehenden einfachen Geraden der M_2^n . Es entsteht eine Jonquières'sche Transformation mit (ab) und $2n - 2$ Coincidenzen (bei unbestimmter Directrixsubstitution) und Verkettungen der $b_3 \dots b_\sigma$ und $a_3 \dots a_\sigma$ gemäss den räumlichen. Wegen der Projectivität unter den Ebenen durch $a_1 a_2$ folgt, dass die Directrixsubstitution für die Coincidenzen aus Cyclen der Ordnung $(h + 1)$ und etwa $1, 2(e_i e'_i)$ bestehen muss, also $2n - 2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{h + 1}$. Nimmt man eine solche Transformation in der Ebene an, in einer Geraden durch (ab) zwei Punkte a_1, a_2 , so kann die räumliche Transformation hieraus construirt werden.¹

§ 4. Construction der Typen 5. bis 15. Ordnung.

Theorem XIII. Sind $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ die Fundamentalsysteme einer Transformation $a_1^4 b_1^4, a_2^4 b_2^4, a_i^2 b_i^2$, so besteht die Collineation a_1 in b_1 , a_2 in b_2 , a_i in b_i und reciprok.

Aus $(a_1 a_2 a_3 a_4, a'_1 a'_2 a'_3 a'_4)^3 \cdot (a'_1 a'_2 a'_3 a'_4, b_1 b_2 b_5 b_6)^3$ folgt $(a_1^4 a_2^4 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^2, b_1^4 b_2^4 b_3^2 b_4^2 b_5^2 b_6^2)^5$, wo a_5, a_6 in a'_4, a'_3 durch T_1 und a'_3, a'_4 in b_4, b_3 durch T_2 übergehen. Nach einem Theoreme aus Am. Journal XIX. besteht die Collineation a_1 in a'_1 , a_2 in a'_2 , a_3 in a'_3 , a_4 in a'_4 , a_5 in a'_4 , a_6 in a'_3 und die andere a'_1 in b_1 , a'_2 in b_2 , a'_3 in b_5 , a'_4 in b_6 , a'_3 in b_3 , a'_4 in b_4 , woraus durch Composition folgt a_1 in b_1 , a_2 in b_2 , a_3 in b_3 , a_4 in b_4 , a_5 in b_5 , a_6 in b_6 . Hierin liegt auch der Beweis für die Umkehrung.

LIII. n° 10. erfordert nach XIII., dass $a_1 a_3, a_2 a_4$ zwei involutorische Paare a_5, a_6 zwei Doppelpunkte einer Raumcollineation seien, welche, da die 6 Punkte unabhängig sein müssen, eine geschaarte Involution sein muss. T entsteht durch Zusammensetzung von $(a_i b_i)$ ($i = 1 \dots 6$) mit dieser Collineation. Ist M_1^4 mit Spitze invariant, so folgt aus $a_1 + a_2 + a_3 + \alpha a_5 \equiv \beta$ und $a_1 + a_2 + a_6 + \alpha a_6 \equiv \beta$, $a_5 = a_6$, aber mit Coincidenz von a_5, a_6 würde die Collineation $a_5 a_6, a_1 a_3$ in einer Ebene verlangen. In M_1^4 mit $u' + iu \equiv \gamma$ ist die Transformation dagegen construierbar, a_5, a_6 werden die Doppelpunkte der Correspondenz $u' + iu \equiv \gamma$.

¹ Wenn an $(a_1 b_1)$ oder an $(a_1 b_1), (a_4 b_2)$ sämtliche übrigen Fundamentalpunkte unendlich nahe rücken, kann die Transformation auch einen Index haben, der ein Vielfaches vom Index der Characteristik ist.

T^2 transformirt jede Ebene von $b_5 b_6$ in sich und hat in jeder 4 Doppelpunkte, deren Ort als Durchschnitt zweier Kegel 3. Ordnung (mit den Scheiteln a_5, a_6 , weil die ternäre involutorische Q^3 unter den Geraden von a_5 eine M_1^3 als Doppelpunktsort hat), eine Curve 8. Ordnung durch $a_1^2 \dots a_6^2$ ist. Diese M_1^8 ist Ort von ∞^1 involutorischen Paaren für T . Es gibt invariant 4 Curven M_1^4 , welche aus M_1^1 und M_1^3 bestehen, zwei, deren M_1^1 durch a_5 , zwei, wo sie durch a_6 gehen. Zwei invariante M_1^4 sind harmonisch.

LIV. n° 11. erfordert nach XIII., dass $a_1 a_3 a_2 a_4$ ein Quadrupel einer Collineation Index 4 und a_5, a_6 zwei Doppelpunkte derselben sind. T entsteht durch Zusammensetzung der Transformation $(a_i b_i)$ mit dieser Collineation. Invariant sind die 4 zerfallenden M_2^2 : $a_1 a_3 a_5 + a_2 a_4 a_6$, $a_1 a_3 a_6 + a_2 a_4 a_5$, $a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_6$, $a_1 a_4 a_6 + a_2 a_3 a_5$. In der That lehrt die Parameterrechnung von vorhin, dass M_1^4 mit Spitze nicht möglich ist, aber hier auch, dass M_6^4 mit $u' + iu \equiv \gamma$ nicht möglich ist.

T^2 transformirt die Ebenen von $b_5 b_6$ mit Involution unter einander, die beiden Doppelebenen enthalten acht Bestandtheile der invarianten M_1^4 .

LIII. n° 12. **Theorem XIV.** *Die Characteristik $(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_2 b_4), (a_4 b_2), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$ ist nicht constructibel.*

M_1^4 mit Spitze kann nicht invariant sein, da a_5 ein Doppelpunkt auf M_1^4 sein müsste, aber die Spitze nicht sein kann, also der 8. Basispunkt d_8 des durch die 7 Punkte bestimmten Netzes wäre, was ebenfalls zu Widerspruch führt. Invariante zerfallende M_1^4 ist nicht möglich zu combiniren. Es müssten also 3 harmonische M_1^4 invariant sein, auf jeder a_5 ein Doppelpunkt und d_8 der 2. Doppelpunkt sein. Aber die Characteristik besitzt 10 uneigentliche Doppelpunkte, daher zwei eigentliche, von denen d_8 nur einer, der andere in einer invarianten M_1^4 wäre. Übrigens lehrt auch die Parameterrechnung für $u' + iu \equiv \gamma$ die Unmöglichkeit. Denn aus $i(-a_2 - a_3 - a_4) - (a_4 + a_5 + a_6) \equiv \gamma$ und $a_2 + a_3 + a_4 - i a_4 + \gamma \equiv 0$ folgt $a_5 + b_6 \equiv (i - 1)\gamma$ und symmetrisch auch $b_5 + a_6 \equiv (i - 1)\gamma$, also $b_6 \equiv a_6$.

LIII. n° 13. **Theorem XV.** *Die Characteristik $(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_5), b_6$ in a_6 existirt nicht.*

M_1^4 mit Spitze führt wie soeben zu Paradoxem, ebenso $u' + u \equiv \gamma$. Es gibt aber, wie eine Discussion beweist, nicht 6 invariante zerfallende M_1^4 .

LIV. n° 14. **Theorem XVI.** *Die Charakteristik (a_1b_3) , (a_3b_2) , (a_2b_1) , (a_4b_4) , (a_5b_5) , a_6 in a_6 existirt nicht.*

Die 7 Punkte bestimmen ein Netz von M_2^2 , dessen 8. Basispunkt ein Doppelpunkt d_8 von T ist. M_1^4 mit Spitze kann nicht invariant sein, weil a_4, a_5 coincidiren müssten. Zerfallende M_1^4 erfordern mindestens Alineation von Punkten, welche sich aus den successiven Fundamentalsystemen als unmöglich erweist.

LVII. n° 15. erfordert keine Bedingung für das Bestehen.

LVII. n° 16. **Theorem XVII.** *Die Charakteristik (d_id_i') $i = 1, \dots, 5$. d_6 in a_6 ist nicht existent.*

Sie besitzt 20 uneigentliche Doppelpunkte, also mehr als $2m + 2$, daher ∞^1 , deren Ortscurve wegen der Äquimultiplicität durch b_6, a_6 gieng, während diese nicht als Doppelpunkte fungiren können.

LIII. n° 17. **Theorem XVIII.** *Die Charakteristik (d_1f') , (fb'_2) , $(d_2b'_3)$, $(d_3b'_3)$, $(b_1d'_2)$, $(b_2d'_3)$, $(b_3d'_1)$ existirt nicht.*

Es sind 16 uneigentliche Doppelpunkte vorhanden. Der 8. Basispunkt d_8 ist ein Doppelpunkt und kann, wie eine Discussion beweist, nicht unendlich nahe an einen der 7 Punkte rücken. Es wären also ∞^1 Doppelpunkte und ∞^1 invariante M_1^4 vorhanden, welche wegen $(b_1d'_2)$, $(b_2d'_3)$, $(b_3d'_1)$ (Parameterrechnung gibt $b_1 = b_2 = b_3$) nicht Spitze haben und nicht $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ tragen kann. $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ kann sie nicht tragen, weil sie d_8 und einen willkürlichen der ∞^1 Doppelpunkte, also zwei enthalten müsste. Ferner können ∞^1 zerfallende M_1^3 ersichtlich nicht invariant sein.

LIII. n° 18. **Theorem XIX.** *Die Charakteristik (b_1f') , (fb'_1) , $(d_1b'_3)$, $(d_2d'_2)$, $(d_3b'_2)$, $(b_2d'_3)$, $(b_3d'_1)$ existirt nicht.*

Uneigentlicher Doppelpunkte gibt es 14, von den 2 eigentlichen ist einer der 8. Basispunkt des invarianten Netzes, der andere reicht für die drei invarianten M_1^4 nicht aus. Überdies lehrt die Parameterrechnung in den M_1^4 mit $u' + u \equiv \gamma$ und mit Spitze die Behauptung.

LIII. n° 19 erfordert keine Bedingung unter den 7 Punkten zum Bestehen. Sie entsteht, wie ich im Am. Journal 1897 bewiesen, durch die $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$, indem alle M_2^4 , welche durch einen Raumpunkt P_1 gehen, auch noch durch einen bestimmten Raumpunkt P'_1 gehen. $P_1 P'_1$ ist die Verwandtschaft 15. Ordnung.

Theorem XX. *Alle periodischen Transformationen mit einem der gegenwärtigen Fundamentalsysteme sind durch Reciprokaltransformationen äquivalent zu machen mit einer der folgenden Transformationen:*

1. einer Collineation,
2. einer Transformation mit $(a^{n-1}b^{n-1})$, unter dessen Stralen einer der 28 ebenen constructibeln Typen herrscht,
3. einer Transformation mit $(a_1^{n-1}b_1^{n-1}), (a_2^{n-1}b_2^{n-1}), b_i$ in $\dots b_i^h = a_i$, wo 1 oder 2 der h Null sein können, aber alle übrigen unter einander gleich sind,
4. einer Transformation mit $(a_1^{n-1}b_2^{n-1}), (a_2^{n-1}b_1^{n-1}), b_i$ in $\dots b_i^h = a_i$ mit dem in 3. über die h Gesagten,

5. $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_1)$,	3. Ordnung	Index	4m
6. $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), b_1$ in a_4 ,	3. »	»	6
7. $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), b_1$ in b'_1 in a_4 ,	3. »	»	10
8. $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), b_1$ in b'_1 in b''_1 in a_4 ,	3. »	»	18
9. $(a_1b_2), (a_2b_3), b_4$ in a_3, b_1 in b'_1 in a_4 ,	3. »	»	14
10. $(a_1b_3), (a_3b_1), (a_2b_4), (a_4b_2), (a_5b_5), (a_6b_6)$,	5. »	»	4
11. $(a_1b_3), (a_3b_2), (a_2b_4), (a_4b_1), (a_5b_5), (a_6b_6)$,	5. »	»	4
12. $(d_i d'_i) \ i = 1 \dots 6$,	7. »	»	2
13. $(h_i h'_i) \ i = 1 \dots 7$,	15. »	»	2

IV. THEIL.

Theorie der endlichen Gruppen von Characteristiken.

Die Analogie gegenwärtiger Fundamentalsysteme mit den gesammten birationalen Fundamentalsystemen der Ebene erweist sich besonders auch hier und ich werde mich mit Bezug auf mein schon citirtes Buch ¹ worin jene Theorie endgiltig begründet ist, kurz fassen, ebenso im V. Theile.

§ 1. *Das Äquivalenztheorem.*

Es wird wie im III. Theil d. Abh. und wie im Buche I. Th. § 2 bewiesen, dass invariante Singularitätencomplexe existiren, auf diese die Verminderung der adjungirten Functionen (Complexe) angewandt und werden dann die Äquivalenztheoreme über die Curvensysteme mit $p=0, 1$ zur Geltung gebracht und wird erhalten:

Theorem I. *Jede endliche Gruppe von Characteristiken gegenwärtiger Fundamentalsysteme ist durch Reciprokaltransformationen äquivalent einer der folgenden typischen Gruppen:*

1. *Gruppen von Collineationen (Vertauschungen über gewöhnlichen Punkten).*
2. *Gruppen mit gemeinsamem $(a^{n-1}b^{n-1})$: monoidale Gruppe.*
3. *Gruppen mit $(a_1^{n-1}b_2^{n-1}), (a_2^{n-1}b_1^{n-1})$ gemeinsam: dyoidale Gruppe.*
4. *Gruppen cubischer Characteristiken mit 3 gemeinsamen Fundamentaltalpunkten in Coincidenz $(a_1b_i), (a_2b_k), (a_3b_l), (i, k, l = 1, 2, 3)$.²*
5. *Gruppen cubischer Characteristiken mit 4 gemeinsamen coincidirenden Fundamentaltalpunkten $(a_1b_i), (a_2b_k), (a_3b_l), (a_4b_m)$.*
6. *Gruppen cubischer Characteristiken über 5 gemeinsamen Punkten.*
7. *Gruppen über 6 festen Characteristikpunkten.*
8. *Gruppen über 7 festen Characteristikpunkten.*

¹ Berlin, Mayer & Müller, 1895.

² Cf. hier folgend § 3.

§ 2. Die monoidalen und dyoidalen Gruppen.

Eine Gruppe mit gemeinsamem Punkte $(a^{n-1}b^{n-1})$ ist endlich, wenn die übrigen Fundamentalpunkte nach I. Theil § 4 eine ternäre endliche Gruppe constituiren, die Restgruppe jener. Da nach I. Theil XXXVII. zwei Gruppen mit $(a^{n-1}b^{n-1})$ äquivalent sind, wenn ihre Restgruppen äquivalent sind, so folgt, orthanallagmatisch statt monoidal setzend:

Theorem II. Jede endliche orthanallagmatische Gruppe ist entweder äquivalent einer Gruppe von Collineationen oder einer dyoidalen Gruppe mit $(a_1^{n-1}b_1^{n-1}), (a_2^{n-1}b_2^{n-1})$ gemeinsam oder einer Gruppe, deren Restgruppe einer meiner Typen $M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$ ¹ oder eine von deren typischen Untergruppen ist.

Als Invarianten der Gruppe kann man die Invarianten (das cit. Buch I. Th. § 3) der Restgruppe bezeichnen und die holoedrisch isomorphen Gruppen an ihnen bilden. Bei fest angenommenen $(a_1b_2), (a_2b_1)$ gibt es über gegebenen N einfachen Punkten eine endliche Totalgruppe von dyoidalen Charakteristiken und für die Untersuchung dieser und ihrer Untergruppen gilt genau der § 6 meines cit. Buches I. Theil, also auch die noch umfassendere Totalgruppe von Substitutionen 2. Art (p. 31).

Theorem III. Bei festen $(a_1b_2), (a_2b_1)$ gibt es über einer gegebenen Anzahl N einfacher Punkte eine endliche Totalgruppe dyoidaler Charakteristiken, welche aus der ebenen Gruppe des cit. § 6 durch Composition mit der Substitution $(a_1b_2), (a_2b_1), (a_i)$ ($i = 1 \dots N$) gefunden wird.

Um Untergruppen umzuwandeln, hat man einzelne oder alle Basis-Charakteristiken einer Untergruppe aus der Ebene (oder von $(a_1b_1), (a_2b_2)$) zu verdoppeln, indem man bezügliche Charakteristiken mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$ hinzufügt. Oder:

Theorem IV. Die Gruppen mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$ sind zusammengesetzt wie die Gruppen mit $(a_1b_1), (a_2b_2)$ über $N + 1$ Punkten, deren einer in den Substitutionen 2. Art intransitiv (l. c.) gehalten wird.

¹ Das cit. Buch: I. Theil §§ 4, 5, 8.

§ 3. Die typischen Gruppen über 3, 4, 5, 6, 7 Punkten.

Die Gruppe n. 4. des Th. I. kann in eine Gruppe von Collineationen übertragen werden, indem man $(a_1 a_2 a_3 d)^3$ anwendet, wo d einen willkürlich genommenen Doppelpunkt für alle Charakteristiken bezeichnet.¹

Theorem V. Die Basis der Gruppe n° 5 sind $(a_1 b_1) \dots (a_4 b_4)$ und die Collineationen a_1 in a_2 in a_3 in a_4 in a_1 ; a_1 in a_2 in a_1 , a_3 in a_3 , a_4 in a_4 . Die Gruppe enthält 48 Charakteristiken.

Diese Totalgruppe enthält noch typische Untergruppen, das Wort »typisch« im Sinne gegenwärtiger Theorie genommen.

Corollar. Die Gruppe ist holodrisch isomorph einer Gruppe von Vertauschungen unter 8 Buchstaben. Die Punkte a_i und die Ebenen $a_i a_k a_l$ werden nämlich unter einander vertauscht.

Theorem VI. Die Gruppe n° 5 ist keiner der vorhergehenden Gruppen birational äquivalent.

Die entsprechend gebaute Gruppe M_3 in der Ebene war reductibel, weil es ein in sich transformirtes Netz homaloidaler C_3 gab. Das System müsste im R_3 äquimultipel in $a_1 \dots a_4$ sein, also $3m - 4s = m$, m gerade, während die homaloidalen M_2^m stets ungerades m haben. (I. Th. § 1.)

Theorem VII. Die Totalgruppe von Charakteristiken über 5 Punkten ist holodrisch isomorph der symmetrischen Gruppe aller Vertauschungen unter 6 Buchstaben.

Die 3 ersten Beweise auf p. 20 meines Buches lassen sich auch hier geben, entsprechend verallgemeinert. Also z. B. (3. Bew.) die Charakteristiken vertauschen die 6 linearen Curvensysteme, welche sind: die Geraden durch a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 resp. und die $M_1^3 (a_1, \dots, a_5)$, unter ein-

¹ In einer willkürlichen Gruppe von Permutationen kann man ein bestimmtes Element 1 als Vertreter der Ebene $a_1 a_2 a_3$ annehmen und jedesmal Vorgänger und Nachfolger als a_4, b_4 , um das Bild einer Gruppencharacteristik n° 3 zu haben.

ander und durch eine der 720 Vertauschungen¹ unter ihnen ist die Charakteristik auch vollkommen und eindeutig bestimmt.

Corollar. Die Gruppe wird construiert, indem die Gruppe der Vertauschungen von $a_1 \dots a_5$ (Collineationen) mit den 5 cubischen Charakteristiken $(a_i b_i)$ d in d , wo d einer der 5 a_i ist, combinirt wird.

Theorem VIII. Die Gruppe $n^\circ 5$ ist keiner der vorhergehenden Gruppen birational äquivalent.

Die entsprechend gebaute Gruppe (M_4) in der Ebene war reductibel. Für R_3 wird die Irreductibilität wie in Th. V. bewiesen.

Theorem IX. Die Totalgruppe von Charakteristiken über 6 Punkten enthält $2 \cdot 4^3 \cdot 5^2 \cdot 6^2$ Charakteristiken.

Sie entstehen, indem die 15 cubischen Ch. $(a_i b_i)$, d_1, d_2 die 15 Charakteristiken 5. Ordnung $(a_i b_i)$ und $(d_i d_i)'$, mit der Collineationsgruppe über 6 Punkten componirt werden, also $|6 \cdot 32$.

Theorem X. Die Totalgruppe $n^\circ 7$ ist isomorph zur Gruppe von Substitutionen, welche die Kummersche Configuration ungeändert lassen, aber mit Meriedrie des Grades 2.

Die Gruppe ist holoedrisch isomorph zur Gruppe von Vertauschungen, hervorgebracht unter diesen 32 Elementen: den 6 Punkten, den 20 Ebenen $a_i a_k a_l$ und den 6 Quadrikegeln $a_i^2 a_{i+1} \dots a_{i+5}$ oder dem ∞^3 -Systeme von M_2^1 , den 15 ∞^3 -Systemen von $M_2^3 a_i^2 a_k^2 a_l^2 a_m^2$, den 15 ∞^3 -Systemen von $M_2^5 a_i^4 a_k^4 a_l^2 a_m^2 a_n^2 a_o^2$, dem ∞^3 -Systeme $M_2^7 a_1^4 \dots a_6^4$. Diese sondern sich in 16 Paare, so dass je zwei eines Paares sich zu $a_1^4 \dots a_6^4$ summiren. Sie können nun den 16 Punkten einer Kummerschen Fläche entsprechend gemacht werden, etwa durch (ideelle) Anwendung der bekannten Reyeschen 1, 2-deutigen Transformation (Crelles Journal Bd. 86).

Bedingung für eine Vertauschung unter den 32 Elementen, damit sie durch eine Charakteristik hervorgerufen sei, ist einzig die, dass 2 Ele-

¹ Bildet man, was ja sehr nahe liegt, durch die M_2^2 , welche $a_1 \dots a_6$ enthalten, die ebenen Schnitte einer M_3^3 im R_4 ab, so wird diese ersichtlich 10 Doppelpunkte haben und es gilt für sie das Theorem: Eine M_3^3 mit 10 Doppelpunkten im R_4 wird durch 720 Collineationen des R_4 in sich selbst transformirt, welches Theorem neu sein dürfte.

mente, welche sich in einer Fundamentalcurve 2. Art (resp. wenn 2 Punkte, gar nicht) oder in einer Curve mit $p = 0$, $u = 2$ (siehe Beweis zu Theorem VI.) oder in einer Curve mit $p = 0$, $u = 4$ schneiden, wieder in 2 Elemente gleichen gegenseitigen Verhaltens übergeführt werden.¹

Bildet man nun die 16 Sextupel unter den 16 Elementarpaaren, welche den conischen Sextupeln der Kummerschen Configuration entsprechen, so überblickt man, dass die eben beschriebene Bedingung das Erhaltenbleiben dieser Sextupelvertheilung zur Folge hat, mit ihm identisch ist.

Corollar I. In der Isomorphie entsprechen jeder Substitution der Kummerschen Configuration zwei Charakteristiken, von denen die eine durch Zusammensetzung mit $[(d_i d'_i)]^7$ aus der anderen entsteht.

Corollar II. Die Totalgruppe $n^\circ 7$ enthält $[(d_i d'_i)]^7$ als mit allen Charakteristiken vertauschbare Charakteristik.

Corollar III. Die Gruppe der Kummerschen Configuration ist zu keiner Gruppe von einem Grade < 16 holodrisch isomorph, und da sie einfach ist, auch nicht meriedrisch.

Theorem XI. Die Totalgruppe der Charakteristiken über 7 Punkten ist endlich und enthält $\underline{7.436}$ Charakteristiken.

Die Endlichkeit ist sicher, da es mit 7 Punkten nur endlich viele Fundamentalsysteme und aus diesen nur endlich viele Charakteristiken gibt. Es gibt 35 cubische, 105 von 5. Ordnung, 7 von 7., 70 andere von 7., 7 von 9., 70 andere von 9., 105 von 11., 35 von 13., 1 von 15. Ordnung, also 436 Fundamentalsysteme.

Theorem XII. Die Gruppe $n^\circ 8$ ist holodrisch isomorph einer Gruppe von Vertauschungen unter 126 Elementen, welche 63 Paare der Imprimitivität besitzt.

Denn die 7 Punkte $a_1 \dots a_7$, die 35 Ebenen $a_i a_k a_l$, die 42 Quadrikel $a_i^2 a_{i+1} \dots a_{i+6}$, die 35 $M_2^3 a_i^2 a_k^2 a_l^2 a_m^2 a_n a_o a_p$, die 7 $M_2^4 a_i^3 a_k^2 \dots a_p^2$ werden

¹ In der Ebene war diese Bedingung so formulirt, dass die fundamentalen linearen Substitutionen die Form $F'_{12} = nn' - \sum x x'$ ungeändert lassen mussten. Cf. mein Buch § 1.

unter einander transformirt, aber so, dass die Paare, welche sich zu $(a_1^8 \dots a_7^8)^{15}$ summiren, erhalten bleiben.

Theorem XIII. *Die Totalgruppe n° 8 ist keiner Gruppe unter weniger als 126 Buchstaben holoeidrisch isomorph.*

Die einzigen Invarianten der Gruppe sind die Singularitätencomplexe der Flächen mit gegebenem p, u (in Folge der Singularitäten in $a_1 \dots a_7$ allein) und die niedrigste Anzahl ist eben die im Theoreme XI. gebildete Anzahl für $p = 0, u = 0$.

Wendet man auf den Raum R_3 die im V. Theil § 5 beschriebene 2, 1-deutige Transposition an, so werden den Vertauschungen der Flächen mit $p = 0, u = 0$ Vertauschungen gewisser Berührungsebenen einer merkwürdigen Übergangsfläche 12. Ordnung mit 9-fachem Punkte (und 3 an ihm unendlich nahen) entsprechend gemacht. Die gegenwärtige Gruppe steht also gewiss mit einem Zweitheilungsprobleme gewisser überall endlicher Doppelintegrale, wie sie nach JACOBI von NÖTHER kurz erwähnt worden sind (Math. Ann. Bd. 2), in Verbindung.

Aber die Gruppe unter 63 Elementen hat gewiss auch zu den Abelschen Integralen $p = 3$ Beziehung. Dafür spricht die Existenz der Jacobischen Curve 6. Ordnung mit $p = 3$ des Netzes der $M_2^2(a_1, \dots, a_7)$.¹

¹ **Theorem XIII'.** *Die Gruppe M_6 in Substitutionen enthält 36 nicht ähnliche Substitutionen. Dieselben sind: 11 Collineationen; $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4)$, mit i_1, i_2 ; 5 andere mit $(a_1b_1), (a_1b_2), (a_2b_1), (a_3b_4), (a_4b_3)$, i_1, i_2 ; 2 andere mit $(a_1b_2), (a_2b_1), (a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_1), d_1, d_2$ oder i_1, i_2 ; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4)$, b_1 in a_4 mit d_1 ; $(a_1b_2), (a_2b_3)$, b_4 in a_3 , b_1 in a_4 ; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4)$, b_1 in b'_1 in a_4 ; $(a_1b_2), (a_2b_3)$, b_1 in b'_1 in a_3 , (a_4b_4) ; (a_1b_2) , b_3 in a_2 , b_1 in a_3 , (a_4b_4) ; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_1)$, b_4 in b'_1 in a_4 ; $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_4)$, b_3 in b'_3 in a_4 ; $(a_1b_2), (a_2b_1), (a_3b_4)$, b_3 in b'_3 in a_4 ; $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_3)$, $(a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6)$ oder dies mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$; zwei Typen 5. O. Index 4; 3 mit (a_1b_1) , 1 mit $(a_1b_2), (a_1b_1)$; Typus 7. O. $(d_i d'_i)$.*

Theorem XIII'. *Die Gruppe M_7 in Substitutionen enthält 64 nicht ähnliche Substitutionen. Dieselben sind: 14 Collineationen; $Q^3: (a_i b_i)$ mit Tripel; $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_4), (a_4b_3)$ mit d_1, d_2, d_3 oder d_1, i_1, i_2 oder Tripel; 5 andere mit $(a_1b_1), (a_2b_2)$; 4 andere mit $(a_1b_1), (a_1b_2), (a_2b_1), (a_3b_4), (a_4b_3)$ ebenso 5 andere mit $(a_1b_2), (a_2b_1), (a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_1)$ ebenso; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_1), (a_4b_4)$ mit Tripel; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4)$, b_1 in a_4 mit d_1, d_2 oder i_1, i_2 ; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_1)$, b_4 in a_4 mit i_1, i_2 ; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_1)$, b_4 in b'_1 in b'_1 in a_4 , 5 Typen; Q^5 : 1 mit (a_1b_1) , 2 Typen Index 4, 2 Typen Index 8, 1 Typus Index 10; 2 mit $(a_1b_1), (a_2b_2)$ 2 mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$; Q^7 : 4 Typen Indices 6, 4, 2, 6, 1 mit (a_1b_1) ; Q^{15} : 1 Typus Index 2.*

V. THEIL.

Theorie der endlichen Gruppen von Transformationen ohne Fundamentaleurven 1. Art.

§ 1. *Das Äquivalenztheorem.*

Um Raum zu sparen, erwähne ich kurz, dass sich die IV Beweise des § 1, II. Theiles hierher für die Gruppen existirender Transformationen adaptiren lassen, wie es für die Ebene in meinem Buche geschehen ist und liefern.

Theorem I. *Jede endliche Gruppe von Transformationen gegenwärtiger Fundamentalsysteme lässt sich durch Recipokaltransformationen äquivalent machen einem der folgenden Typen:*

1. einer Gruppe von Collineationen,
2. einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamem $(a^{n-1}b^{n-1})$,
3. einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamen $(a_1^{n-1}b_2^{n-1})$, $(a_2^{n-1}b_1^{n-1})$,
4. einer Gruppe cubischer Transformationen mit zwei coincidenten Hauptpunktetripeln,
5. einer Gruppe cubischer Transformationen mit gemeinsamen Hauptpunktequadrupel,
6. der Gruppe von 720 Transformationen über 5 festen Punkten oder einer Untergruppe,
7. einer Gruppe von Transformationen über 6 festen Punkten,
8. einer Gruppe von Transformationen über 7 festen Punkten.

Hier ist die Gruppe n° 4 über 3 Punkten typisch, weil man für die Transformationen nicht mehr wie für die fundamentalen linearen Substitutionen einen allen gemeinsamen Doppelpunkt willkürlich annehmen kann.

Die Gruppen von Collineationen im R_3 (Classe n° 1) hat C. JORDAN nicht vollständig bestimmt.

§ 2. Die orthanallagmatischen und dyoidalen Gruppen.

Aus II. Theil § 3 folgt:

Theorem II. Jede endliche Gruppe von Transformationen mit gemeinsamen $(a^{n-1}b^{n-1})$ ist äquivalent entweder: 1. einer Gruppe von Collineationen oder 2. einer Gruppe mit $(a_1^{n-1}b_1^{n-1}), (a_2^{n-1}b_2^{n-1})$ oder 3. einer Gruppe mit $(a^{n-1}b^{n-1})$, deren Restgruppe eine der von mir entdeckten ternären 34 Gruppen mit 7, 8 Punkten (XXVIII. bis LXI. der Tafel in meinem Buche) ist.

Die Gruppen, wo die Restgruppe einer der Typen XV. bis XXVII. meiner Tafel ist, sind nicht vollständig, sondern lassen sich ohne Änderung ihrer Figur zu Gruppen der Art n° 7 und n° 8 des obigen Theoremes I. ergänzen (durch Verbindung $[(h_i, h'_i)]^{15}$), ebenso wo die Restgruppe XII., XIII., XIV. jener Tafel ist, erscheint die Gruppe sofort als Untergruppe einer Gruppe der Arten n° 4., n° 5., n° 6. des Theoremes I.

Theorem III. Die 34 isolirten Typen von Gruppen mit $(a^{n-1}b^{n-1})$ sind construierbar mit einer invarianten irreductibeln M_2^2 oder einer M_1^4 .

Denn die Characteristik der Gruppe enthält für XXVIII. bis LXI. der Tafel 7 oder 8 Punkte, also für den R_3 8 oder 9 Punkte. Dass ein invariantes Ebenenpaar nicht möglich ist, beweist die Discussion von XLII. bis LXI. Die Discussion von XXVIII. bis XLI. beweist, dass die invariante M_1^4 nicht zerfallen kann, ausgenommen bei den cyclischen Gruppen, welche aber wiederum stets eine invariante M_2^2 besitzen.

Theorem IV. Jede dyoidale Gruppe mit $(a_1^{m-1}b_1^{m-1}), (a_2^{m-1}b_2^{m-1})$ oder mit $(a_1^{m-1}b_2^{m-1}), (a_2^{m-1}b_1^{m-1})$ ist construierbar wenigstens in der particulären Form, wo eine invariante M_2^2 existirt, sofern die Ebenen durch a, a_2 nach einer der 5 binären Gruppen projecirt werden.

Der Beweis folgt aus III. Theil § 3 Theorem VII. und aus dem Theoreme für die Ebene (l. c. p. 47).

Theorem V. Die allgemeine dyoidale Gruppe mit $(a_1^{m-1}b_1^{m-1}), (a_2^{m-1}b_2^{m-1})$ oder mit $(a_1^{m-1}b_2^{m-1}), (a_2^{m-1}b_1^{m-1})$ ist mit einer invarianten M_2^n ($a_1^{n-2}a_2^{n-2}$) construierbar.

Die Construction ist genaue Nachbildung der von mir oben im III. Theile § 3, Theoreme X., XI. gegebenen.

§ 3. Die typischen Gruppen über 3, 4, 5, 6 Punkten.

Gruppen n° 4. α) Werden die Ebenenbüschel a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 jedes in sich transformirt, so genügt es, in ihnen drei Gruppen willkürlich anzunehmen, dieselben durch Isomorphieen unter einander zu beziehen und je drei zusammengehörige Projectivitäten zu einer Reciprokaltransformation zu combiniren, wobei die a_i, b_i von selbst entstehen. β) Werden die Ebenenbüschel a_1a_3, a_3a_1 vertauscht, a_1a_2 erhalten, so hat man in einer Gruppe der Art α) aus der ganzen Gruppe oder aus der Untergruppe diejenigen Q^2 , welche in a_1a_3, a_3a_1 ähnliche Projectivitäten haben, durch Einfügung einer (noch auf ∞^1 Arten variablen) Projectivität von a_1a_3 nach a_3a_1 zu einer Q^2 : $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_1)$ zu ergänzen. γ) Werden die Ebenenbüschel a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 cyclisch vertauscht, so müssen die zu ergänzenden Q^2 in α) drei ähnliche Projectivitäten besitzen. δ) Werden beide Processe aus β) und γ) angewendet, so entsteht eine Gruppe, durch welche die drei Ebenenbüschel in allen 6 Arten vertauscht werden.

Gruppen n° 5. Je nachdem die 4 Stralbündel a_1, a_2, a_3, a_4 unter einander vertauscht werden, entstehen verschiedene Classen. Es gibt 8 verschiedene Gruppen von Vertauschungen unter 4 Buchstaben und wie in der Ebene (cf. mein Buch 49—51) wird bewiesen:

Jede dieser 8 Classen von n° 5 wird construirt, indem man eine Transformation $(a_i b_i)$ mit einer endlichen Gruppe von Collineationen, die a_i zu Doppelpunkten haben und mit je 1 Collineation combinirt, welche unter den a_i die Substitutionen der Characteristik hervorbringen.

Gruppe n° 6. Da alle Characteristiken über 4 Punkten construierbar sind, so stimmt die Gruppe mit der Characteristikengruppe überein und enthält auch nur 720 Transformationen.

Gruppe n° 7. Theorem VI. Über 6 willkürlichen Punkten des R_3 gibt es eine Gruppe von 32 (involutorischen) Transformationen, welche auch in jeder anderen über irgend 6 besonderen Punkten bestehenden Gruppe als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist.

Diese Transformationen sind $15[(a_i b_i)]^3$ mit je einem involutorischen Paare im 5. und 6. Punkte, $15[(a_i b_i)]^5$, die $[(d_i d'_i)]^7$ und die Identität. Dass sie ausgezeichnet ist, folgt, weil eine Transformation, welche den 6 Punkten keine Bedingung auferlegt, durch jede andere Transformation über den 6 Punkten in eine eben solche Transformation übertragen werden muss.

Theorem VII. *Jede vollständige Gruppe über 6 Punkten ist abhängig von und vollständig bestimmt durch eine etwaige Gruppe von Collineationen, welche unter den 6 Punkten im Raume bestehen.*

Denn die Collineation, welche unter den Hauptpunktpaaren einer $[a_i b_i]^3$ und zwei gewöhnlichen Punktpaaren pp', qq' herrscht,¹ absorbiert hier alle 6 Punkte, ebenso gewiss die Collineation des Theoremes XIII. im III. Theil und wenn $T = [d_i d'_i]^7$ eine Directrixsubstitution verschieden von der Identität hat, muss diese als Collineation wirklich unter den 6 Punkten bestehen, da T^2 diese Collineation selbst ist.

Theorem VIII. *Wenn drei Punkte in einer Geraden sind, ist die Gruppe übertragbar in eine Gruppe von Collineationen und wenn 4 Punkte in einer Ebene, ist sie dyoidal.*

Denn die M_2^2 durch die Gerade und die übrigen 3 Punkte bilden ein homaloidales System und die M_2^2 , welche in jene Ebene und eine variable Ebene durch die übrigen beiden Punkte zerfallen, müssen unter einander transformirt werden.

Theorem IX. *Es gibt also 7 typische Gruppen über 6 Punkten.*

Denn nun sind die 6 Punkte in einer Raumcurve 3. Ordnung, welche durch die Collineationsgruppe aus VII. in sich transformirt wird, also eine binäre Gruppe trägt, deren es unter 6 Punkten nur 7 verschiedene gibt: 1. die Identität allein, 2. drei Paare einer Involution, 3. die Doppelpunkte und zwei involutorische Paare einer Involution, 4. ein Cyclus und ein Doppelpunkt einer Projectivität des Index 5, 5. die Gruppe über der Form T , 6. ein Cyclus vom Index 6, 7. zwei willkürliche Tripel einer Projectivität des Index 3.

Corollar. Die Ordnungen dieser Gruppen sind bezüglich $3^2, 2.3^2, 4.3^2, 5.3^2, 24.3^2, 9.3^2, 3.3^2$.

¹ Am. Journ. of Math. Vol. 19.

§ 4. Die Anwendung der Kummer'schen Fläche.

Herr REYE und nach ihm W. STAHL haben für die Untersuchung der Strahlencongruenzen 2. O. und Cl. eine $(1, 2)$ -deutige Verwandtschaft untersucht, welche den Ebenen des Raumes R_3 die M_2^2 durch 6 feste Punkte $p_1 \dots p_6$ in R_3 , den Punkten der hierbei entstehenden Kummer'schen Fläche K_4 in R_3' die Punkte der Kernfläche ϕ_4 in R_3 , den 16 Doppelpunkten von K_4 die 15 Geraden $p_i p_k$ und die $M_1^3(p_1 \dots p_6)$ und den 16 Doppelebenen die 6 Punkte p_i und die 10 Ebenenpaare $(p_i p_k p_l, p_m p_n p_o)$ entsprechen macht.

Ist nun über 6 Punkten eine gegenwärtiger Charakteristiken construirt, so transformirt sie die $\infty^3 M_2^2$ durch $p_1 \dots p_6$ unter einander, also auch die Punktepaare, in denen sie sich schneiden, und wird also durch die Reyesche Abbildung in eine Collineation des R_3' übertragen, welche, da in R_3 die ϕ_4 invariant war, die K_4 in sich transformiren wird. Da durch die eindeutige Correspondenz in ϕ_4 die Raumtransformation bestimmt ist, folgt:

Theorem X. *Die Gruppen über 6 Punkten können durch $(1, 2)$ -deutige Abbildung aus den Collineationsgruppen gewonnen werden, welche eine Kummer'sche Fläche in sich transformiren.*

Ich habe im Am. Journ. 1897¹ die aussergewöhnlichen Collineationsgruppen bestimmt, welche eine K_4 reproduciren und bewiesen, dass sie nur von dem projectiven Character einer der 16 conischen Sextupel abhängen, woraus wieder das Theorem VII. geschlossen wird, ebenso VIII. Am selben Orte habe ich auch die Charakteristiken angegeben, in welche sich die einzelnen Collineationen umsetzen.

§ 5. Die Gruppen über 7 Punkten durch Anwendung zweier neuen $(1 - 2)$ -deutigen Transformationen.

1. Alle $M_1^4 p = 1$ durch 7 Punkte $p_1 \dots p_7$ gehen durch einen 8. Punkt α_8 . An diese ∞^2 Curven knüpft sich eine ganze Reihe von Trans-

¹ Meine Note: »Über Collineationsgruppen an Kummer'schen Flächen«.

formationen, indem man nach dem Verfahren für die Ebene¹ auf jeder M_1^4 oder unter je zwei M_1^4 gleichen Moduls eine eindeutig zu bestimmende eindeutige Correspondenz einrichtet. Insbesondere (l. c. Th. 117.): »Wird auf jeder M_1^4 die Correspondenz $u' + u \equiv \gamma$ mit a_8 als Doppelpunkt bestimmt, so entsteht $(8, \dots, 8)^{15}$ mit $p_1 \dots p_7$ als 8-fachen Fundamentalpunkten und $M_2^4(p_i^2 p_{i+1}^2 \dots p_{i+6}^2)$ als Fundamentalflächen«. (l. c. Th. 118) »Die $(8, \dots, 8)^{15}$ transformirt die $M_2^2(p_1^2 \dots p_7^2)$ unter einander, jede in sich«. »Der Ort der Doppelpunkte von $(8, \dots, 8)^{15}$ ist eine $M_2^6(p_1^3 \dots p_6^3)$, welche die 28 Geraden $p_i p_k$ ($i, k = 1 \dots 7$) einfach und die Kegelspitzencurve des Netzes $M_2^2(p_1 \dots p_7)$ als einfache Curve enthält, D_6 .»

Eine (1; 2)-deutige Beziehung von R_3 nach R'_3 kann nun durch ein lineares ∞^3 -System M_2^4 abgeleitet werden, welche durch 3 fernere einfache Punktepaare $q_1 q'_1, q_2 q'_2, q_3 q'_3$ gehen. »(l. c. 120.) In der Transformation, welche 4. O. in R_3 und 16. O. in R'_3 und den Ebenen von R'_3 die $M_2^4(p_1^2 \dots p_7^2 q_1 \dots q_3)$ entsprechen macht, entspricht der D_6 eine Fläche Z_{12} der 12. O., welche einen 9-fachen Punkt A besitzt, an den 3 andere in 3 verschiedenen Richtungen unendlich nahe gerückt sind und nach diesen Richtungen drei 6-fache Gerade durch A hat:» »Durch diese Transposition werden die Gruppen über $p_1 \dots p_7$ in Gruppen birationaler Transformationen 4. O. (Q^4) übertragen, welche in jenen Geraden 3 doppelte Fundamentalgeraden und sonst 3 einfache Fundamentalpunkte besitzen.« Also:

Theorem XI. Die 7-punktigen Gruppen ($n^\circ 8$) des Th. I. werden gefunden, indem man die Gruppen erwähnter Q^4 , welche die Z_{12} reproduciren, durch die 2 — 1-deutige Transposition überträgt.

2. Eine einfachere Transposition ist die folgende.

Lemma. Die $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$, welche durch den Schnitt A_1^8 einer unter ihnen mit einer festen $M_2^2(a_1 \dots a_7)$ hindurchgehen, bilden ein lineares ∞^3 -System.

Die Jacobiana derselben ist wieder jene D_6 (wie überhaupt aller im ∞^6 -Systeme enthaltenen ∞^3 -Systeme). Wird nun unter den Ebenen von R'_3 und diesen $\infty^3 M_2^4$ eine Collineation hergestellt, so hat man eine

¹ Acta Math. Bd. 19. § 12. B.

1 — 2-deutige Transformationen von R'_3 nach R_3 , die von den Ordnungen 4, 8 in R_3 , R'_3 ist und welche die D_6 nur in eine Z_6 mit einem 3-fachen Punkte A überträgt. Der Osculationskegel des 3-fachen Punktes entspricht dem Schnitte der D_6 mit der festen M_2^2 . In der Transposition entsprechen den $a_1 \dots a_7$ Flächen 2. O., der A_1^8 eine Ebene. Den Transformationen über $a_1 \dots a_7$ als Characteristikpunkten entsprechen quadratische Transformationen Q^2 in R'_3 , weil eine willkürliche $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$ in R'_3 einer M_2^2 entspricht. Den $M_2^2(a_1 \dots a_7)$ entsprechen in R'_3 Ebenen des Bündels um A , und da jene, also auch diese unter einander transformirt werden, ist A der Fundamentalpunkt von Q^2 . Der Fundamentalkegelschnitt geht an A unendlich nahe.

Theorem XIII. Die 7-punktigen Gruppen ($v^\circ 8$) des Th. I. werden gefunden, indem man die Gruppen quadratischer Transformationen, welche die $Z_6(A^3)$ reproduciren, durch die 2 — 1-deutige Transposition überträgt.

In dieser Form ist das Problem nun so einfach wie es nach der Methode meines Buches das parallele in der Ebene ist.¹

§ 6. Andere Methoden für die 7-punktigen Gruppen.

1. Die $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$ bilden einen R_6 , in dem eine endliche Gruppe von Collineationen entsteht. In diesem bilden die M_2^4 , welche durch d_s gehen, und zwar von selbst zweifach, einen R_5 , der invariant sein muss, daher jede Gruppe auch einen Punkt invariant lässt; also:²

Theorem XIII. Jede Gruppe über 7 Punkten lässt eine $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$ invariant.

Jener R_5 ist gleichzeitig repräsentirender Raum derjenigen M_2^4 , welche sich als quadratische Functionen der M_2^2 darstellen lassen. In dem R_5 ist eine invariante M_2^4 , die doppelt gezählten M_2^2 , und eine invariante M_4^3 , die Paare von M_2^2 überhaupt.

¹ Acta Math. Bd. 19, p. 160—168 und das cit. Buch. III. Th. § 8.

² Cit. Buch. II. Th. § 2.

2. Gegenüber meinen vorhergehenden 3 Methoden gebe ich als diejenige Methode, welche am wenigsten neue Untersuchung erfordert, die folgende.

Theorem XIV. *Jede Transformation einer Gruppe über $(a_1 \dots a_7)$ muss die Kegelspitzencurve L_6 des Netzes $M_2^2(a_1 \dots a_7)$ in sich transformiren und ist ihrerseits durch die Correspondenz in dieser Curve zweideutig bestimmt.*

Der 2. Theil des Satzes folgt daraus, dass die von den M_2^2 auf der L_6 ausgeschnittene Involution G_{12}^2 in sich transformirt wird und durch eine Schnittpunktgruppe g_{12} derselben die M_2^2 des Netzes bestimmt ist.

Ferner habe ich Am. Journ. 1897 bewiesen: »Wenn eine Kegelspitzencurve L_6 eine eindeutige Correspondenz enthält, so ist dieselbe in einer Collineation enthalten.»

Die Kegelspitzencurve kann aber auch auf eine L_4 abgebildet werden und es handelt sich also um die Collineationsgruppen, welche eine L_4 in der Ebene reproduciren können. Diese habe ich in Acta Math. Bd. 19, p. 157 und meinem Buche p. 89 endgiltig abgeleitet. Es handelt sich also, zu einer L_4 eine auf sie eindeutig bezogene Kegelspitzencurve zu construiren. Dies geschieht durch die Abbildung einer M_2^2 . Man nimmt auf der L_4 6 Punkte derart, dass ihr auf der M_2^2 , welche sich mittelst dieser 6 Punkte abbildet, eine Kegelspitzencurve c_6 entspricht. Dies ist nach einem Theoreme von mir der Fall, wenn¹ die 6 Punkte die Berührungspunkte der L_4 mit einer Curve 3. O. sind. Da es nun 14 verschiedene L_4 mit Gruppen von Correspondenzen gegeben hat (l. c.), so folgt:

Theorem XV. *Es gibt 14 verschiedene vollständige Gruppen von Transformationen ohne Fundamentalcurven 1. Art über 7 Punkten. Die Lage der 7 Punkte bestimmt sich jedesmal mit Hilfe einer ebenen L_4 $p = 3$.*

Meine bisherigen Resultate zusammengefasst liefern jetzt:

Theorem XVI. *Jede endliche Gruppe von Transformationen ohne Fundamentalcurven 1. Art ist äquivalent einem der folgenden Typen:*

I. einer Gruppe von Collineationen des R_3 ,

II. bis XXXV. einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamem $(a^{n-1}b^{n-1})$, wo die Restgruppe einer meiner ebenen Typen XXVIII. bis LXV. ist,

¹ Am. Journ. of Mathem. 1897, Theorie der period. cubischen Transformationen im R_3 , Cap. I., Theorem VIII.

XXXVI. bis XL. einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamen $(a_1^{n-1}b_1^{n-1}), (a_2^{n-1}b_2^{n-1})$, wo die Ebenen durch a_1a_3 zu einer der 5 binären Gruppen zusammentreten (eingeschlossen die Gruppen höherer Homologieen dyoidaler Natur),

XLI. bis XLV. einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamen $(a_1^{n-1}b_2^{n-1}), (a_2^{n-1}b_1^{n-1})$, wo die Ebenen durch a_1a_2 zu einer der 5 binären Gruppen zusammentreten,

XLVI. einer Gruppe cubischer Transformationen mit drei gemeinsamen Hauptpunktcoincidenzen, die nur cyclisch vertauscht werden,

XLVII. einer Gruppe cubischer Transformationen mit drei gemeinsamen Hauptpunktcoincidenzen, die auf alle Arten vertauscht werden,

XLVIII. bis L. einer Gruppe cubischer Transformationen mit vier gemeinsamen Hauptpunktcoincidenzen, die nur cyclisch oder nach der Tetraedergruppe oder nach der Octaedergruppe permutirt werden,

LI. einer Gruppe von 720 Transformationen über 5 festen Punkten $r = 720$,

LII. einer Gruppe über 6 Punkten, welche willkürlich sind $r = 32$,

LIII. welche drei Paare einer collinearen Involution sind, $r = 64$,

LIV. welche zwei Tripel einer cyclischen Collineation sind, $r = 96$,

LV. welche die Doppelpunkte und 2 Paare einer Involution sind, $r = 128$,

LVI. welche ein Cyclus vom Index 6 einer Collineation sind, $r = 192$,

LVII. oder ein Doppelpunkt und ein Cyclus vom Index 5, $r = 160$,

LVIII. welche eine Form T in einer M_1^3 sind, $r = 768$,

LIX. bis LXXI. einer aus 14 Gruppen über je 7 Punkten, $r = 18, 336, 96, 192, 6, 6, 12, 32, 12, 96, 16, 8, 4, 2$.

Von diesen können die ersten 50 als typische Classen, die übrigen 21 als isolirte Gruppentypen bezeichnet werden.

Anmerkung. Der grösste Theil dieser Gruppen bleibt (während die einzelnen Typen durch Projectionen in dyoidale Gruppen übergeführt werden) auch in der allgemeinen Theorie der Gruppen birationaler Transformationen im R_3 typisch, d. h., wenn zur Transposition nicht nur Transformationen gegenwärtiger Art, sondern birationale Transformationen überhaupt verwendet werden.

Calais, London, Auer, 1896.

Berichtigung.

In Folge eines von mir nicht verschuldeten Versehens, während des Druckes kann ich eine notwendige Correction der Form 3) des Textes erst hier nachtragen. Die cubische Form 3) ist nicht invariant durch die Substitution 1) (überhaupt durch keine anderen als welche die Variablen unter einander vertauschen).

Dagegen können allerdings andere irreductibele cubische Formen durch Combination der quadratischen und linearen Formen gewonnen werden. Zu den letzteren ist die Form $3n - \sum y_i$ hinzuzufügen.

Ausserdem bleibt für jede Substitution 1) eine cubische Form invariant, welche aber nicht für alle in gleicher Weise aufgeschrieben werden kann. Denn da für die einzelne $(a_i; b_i)^3$ die Form

$$n^3 - 2n \sum y_{ik}^2 - \sum x^3 + 3 \sum (x_i + x_k) y_{ik}^2 - 2 \sum y_{ik}^3$$

invariant bleiben soll (Amer. J., T. 19), so wird für jede Transformation, welche sich aus solchen zusammengesetzt, eine Form

$$(3) \quad n^3 - \sum x^3 + 3 \sum L_i y_i^3 - 2 \sum y_i^3$$

wo die L_i gewisse von der Transformation abhängige lineare Functionen von n, x_i sind, invariant bleiben.

Die Tragweite dieser Resultate mag man daran ermessen, dass bisher überhaupt die ganzzahligen Transformationen nur von ternären und quaternären Formen untersucht worden sind, nämlich durch Herrn POINCARÉ (Journ. de l'Ecole Polyt. 1880). Die obige Form 3) liefert cubische Formen von irgend wie hoher Anzahl Variablen und sofort eine ganzzahlige Substitution, welche sie in sich transformirt.

Die Wichtigkeit dieses Resultates wird noch dadurch erhöht, dass man über σ Fundamentalpunkten ($\sigma > 7$) unendlich viele Transformationen gegenwärtiger Art construiren kann. Stellt man nun zu jeder meine fundamentale lineare Substitution und zwar zunächst nur die unvollständige auf, so erhält man eine merkwürdige discontinuirliche Gruppe ganzzahliger linearer Substitutionen in $\sigma + 1$ homogenen Variablen. Man erwäge, dass bisher überhaupt nur discontinuirliche Gruppen von Substitutionen in 3 Variablen aufgestellt worden.

Schreibt man aber die vollständigen linearen Substitutionen 1) oder 2), so erhält man Gruppen von einer Art, wie sie überhaupt bisher noch nicht angetroffen worden sind. Durch die Zusammensetzung der Transformationen über den σ Fundamentalpunkten wird sich nämlich die Anzahl der Fundamentalcurven 2. Art und damit die Anzahl der Variablen in den Substitutionen 1) fortwährend vermehren, und man erhält daher eine discontinuirliche Gruppe in einer unendlichen Anzahl von Variablen. Dem entsprechend erhält man auch eine isomorphe Gruppe von Permutationen, welche durch diese Gruppe hervorgerufen werden, unter unendlich vielen Elementen, nämlich den σ Punkten und allen M_2^2 $p' = 0, u = 0$, welche sich über diesen σ Punkten construiren lassen.

Eine weitere Correctur ist in Folge der vorigen zu p. 13 anzugeben. Zu der dortigen Form muss $3 \sum L_i y_i^2 - 3 \sum y_i^3$ addirt werden. Jedoch sind die Zeilen 2 bis 7 p. 14 dann nicht auf diese neue (wirklich invariante) Form zu beziehen, sondern auf die alte Form, die aber eben aus dem in diesen Zeilen enthaltenen Grunde nicht invariant sein muss.

WEIERSTRASS

VON

G. MITTAG-LEFFLER.

Am Freitag den 19. Februar starb in Berlin in seinem 82^{sten} Lebensjahre KARL THEODOR WEIERSTRASS.

In einer seiner Abhandlungen spricht Weierstrass die Überzeugung aus, dass die von ihm erhaltenen Resultate »wenigstens diejenigen Mathematiker interessiren werden, welchen es Befriedigung gewährt, wenn es gelingt irgend ein Kapitel der Wissenschaft zu einem wirklichen Abschlusse zu bringen».

Mit diesen schlichten Worten hat Weierstrass selbst seine ganze Thätigkeit charakterisirt und das Ziel bezeichnet, das er in allen seinen Arbeiten anstrebte. Die Geschichte der Mathematik wird es auch bestätigen, dass bis jetzt kein Mathematiker in höherem Grade und grösserem Umfange als er das Ziel erreicht hat, »ganze Kapitel der Wissenschaft zu wirklichem Abschlusse zu bringen». Mit unübertroffener Klarheit und Schärfe der Beweisführung hat Weierstrass in der Theorie der analytischen Functionen die mannigfaltigen Sätze der Analysis zu einem abgeschlossenen, einheitlichen Ganzen vereinigt. Aus Anlass der vielen functionentheoretischen Jugendarbeiten, welche ihm zur Prüfung vorgelegt wurden, äusserte sich Weierstrass einmal dem Verfasser dieser Zeilen gegenüber etwa in folgenden Worten:

»Eine gute Functionentheorie zu schaffen ist nicht die Sache eines Anfängers, mag dieser auch noch so begabt sein. Zuerst muss man alles bekannte analytische Material vollständig beherrschen und sich Klarheit verschafft haben über alle, auch die verwickelsten, Verhältnisse, denen

man begegnet ist oder welche man sich vorzustellen vermag. Erst dann darf man denken, eine Functionentheorie zu schaffen, welche alles beherrscht und erklärt. Ein solches Unternehmen kann daher der Natur der Sache nach nur die Krönung eines mathematischen Lebenswerkes sein.»

Indessen wird jeder, der aufmerksam die ersten Abhandlungen von Weierstrass durchliest, sogleich erkennen, dass Weierstrass selbst schon mit 30 Jahren in vollständigem und sicherem Besitz der wesentlichsten Grundgedanken in der functionentheoretischen Auffassung war, welche er seitdem ununterbrochen in den verschiedensten Richtungen vollendet und bereichert hat. Diese Thatsache ist nicht schwer zu erklären. Bezeichnet doch die unablässige, intensive Arbeit an der Lösung des Problemes der Abel'schen Functionen — des allgemeinsten und verwickelsten Problemes der Functionentheorie, das bis jetzt seine Lösung gefunden hat — den Ausgangspunkt von Weierstrass' wissenschaftlicher Laufbahn. Die innere Beschaffenheit dieses Problemes und die Art der Begabung von Weierstrass führten diesen mit Nothwendigkeit dazu, festen Grund in der scharfen Fixirung des Begriffes der analytischen Function zu suchen. Er äussert sich hierüber selbst in seiner Akademischen Antrittsrede: »Freilich wäre es thöricht gewesen, wenn ich an die Lösung eines solchen Problems auch nur hätte denken wollen, ohne mich durch ein gründliches Studium der vorhandenen Hülfsmittel und durch Beschäftigung mit minder schweren Aufgaben dazu vorbereitet zu haben. So sind Jahre verflossen, ehe ich an die eigentliche Arbeit gehen konnte etc.« Unter den mannigfachen Aufgaben, deren Lösung die umfangreichen und tiefgehenden Arbeiten Weierstrass' gewidmet sind, wird man es doch stets als Weierstrass' liebstes Problem bezeichnen müssen, der Theorie der Abel'schen Functionen denselben Grad von Abschluss und Vollendung zu geben, wie der Theorie der elliptischen Functionen, und somit auch dieses »Kapitel der Wissenschaft zu einem wirklichen Abschluss zu bringen«. Auch hat ihn dieses Problem vor allen anderen dazu geführt, die tieflegendsten, verborgensten Geheimnisse der Theorie der allgemeinen analytischen Functionen immer mehr zu durchdringen.

Die stete Beschäftigung mit solch' tiefen und schweren Aufgaben verlieh Weierstrass bei seinem Genie und Scharfsinn eine Überlegenheit über andere Zeitgenossen, welche einst in einem Kreise von Mathematikern, die um ihn versammelt waren, mit folgenden Worten charakterisirt wurde:

»Weierstrass hat doch etwas übermenschliches an sich. Man kann ihm nie etwas neues erzählen. Er weiss alles schon im voraus.»

Aber, wenn Weierstrass auch »alles im voraus wusste«, so können doch seine in allen Ländern verbreiteten Schüler mit Rührung und Dankbarkeit bezeugen, dass er diese Kenntnisse stets nur zur Belehrung, Aufklärung und wissenschaftlichen Unterstützung verwendete, niemals aber dazu, andere zu beschämen oder seine Überlegenheit fühlen zu lassen. Und die wenigen, welche das Glück gehabt haben, ihm aus eigenen oder anderen Untersuchungen etwas erzählen zu können, das er nicht wusste oder doch wenigstens nur ahnte, werden nie vergessen, mit welch' lebhaftem Interesse und mit welch' unbedingtem Anerkennen er solche Mittheilungen aufnahm.

Bekanntlich war Weierstrass selbst kaum Jemandes persönlicher Schüler gewesen. Der Mathematiker aber, dessen Schriften auf seine Entwicklung den grössten Einfluss gehabt haben, ist Abel. Einer der ersten Schüler von Weierstrass in Berlin, der ihn im Anfang seiner wissenschaftlichen Lehrthätigkeit am genauesten gekannt hat, sagte mir: »Ich kann mir Weierstrass nicht anders denken, als mit den Werken Abels in der Hand und stets auf Abel hinweisend.« »Lesen Sie Abel«, war sein erster und letzter Rath. Seiner Bewunderung für Abel, der er bei den verschiedensten Anlässen Ausdruck gab, blieb immer dieselbe. »So lange die Kultur nur besteht, wird Abel die Bewunderung der Kenner immer erregen.« — »Abel ist einer der Glücklichen, die etwas ewig bleibendes geleistet haben.« So äusserte sich Weierstrass bei Gelegenheit des 400-jährigen Jubiläums der Universität Upsala.

Dass Cauchy auf den Entwicklungsgang von Weierstrass keinen tiefergehenden Einfluss gehabt hat, ist mehrfach hervorgehoben worden. Weierstrass selbst hat bei der Feier seines 80^{sten} Geburtstages erzählt, dass er mit den analytischen Arbeiten Cauchy's erst in einer späten Periode seines Lebens Bekanntschaft gemacht habe. Auf den Gymnasien zu Deutsch-Krone und Braunsberg war man zu der Zeit, als Weierstrass den Grund seiner künftigen Grösse legte, nur sehr unvollkommen mit mathematischer Litteratur versehen und die eigenen Mittel Weierstrass' erlaubten ihm nur, das allernöthigste anzuschaffen.

Indessen muss das Verhältniss der Weierstrass'schen Functionentheorie zur Cauchy'schen und zu der aus dieser entsprungenen Riemann'schen viel

tiefer aufgefasst werden, als nur von jenem Gesichtspunkte aus. Raum und Zeit verbieten mir leider hierauf näher einzugehen und mich überhaupt ausführlich an dieser Stelle über Weierstrass' wissenschaftliches Lebenswerk zu verbreiten, so verlockend dies auch für mich wäre. Denn die grosse und edle wissenschaftliche Persönlichkeit Weierstrass', seine Stellung in der Wissenschaft, seine grossartige Lehrthätigkeit und deren Früchte zu schildern — das ist eine ebenso hohe wie schwere Aufgabe, die naturgemäss viel Zeit und viele Vorbereitungen erfordert. Indessen werden wir für eine spätere ausführliche Würdigung des grossen Gelehrten in dieser Zeitschrift Sorge tragen, die es sich von jeher als höchste Aufgabe gestellt hat, in Weierstrass' Geiste zu arbeiten, und die in ihm einen ihrer treuesten Freunde und kräftigsten Förderer verloren hat. Wir erinnern in dieser Hinsicht an seine lebhafteste Theilnahme bei der Preisfrage, welche bei Gelegenheit des 60^{sten} Geburtstages seiner Majestät des Königs Oscar ausgeschrieben wurde. Auch besitzen wir noch viele andere Beweise für das Gesagte und denken daran, dieselben vielleicht später einmal zu veröffentlichen.

Im 7^{ten} Bande dieser Zeitschrift findet man ein Bildniss von Weierstrass, angefertigt nach einer am 70^{sten} Geburtstage Weierstrass' aufgenommenen Photographie. Wir hoffen später auch eine Reproduction des Porträts veröffentlichen zu können, welches Voigtländer aus Anlass des 80^{sten} Geburtstages von Weierstrass gemalt hat.

SUR UNE FORME NOUVELLE
DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

Soient A, B, C les trois corps; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées du point A ; x_4, x_5, x_6 celles du point B ; x_7, x_8, x_9 celles du point C .

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment la masse du corps A par m_1, m_2, m_3 ; et de même la masse du corps B par m_4, m_5 ou m_6 ; et celle du corps C par m_7, m_8 ou m_9 .

Je poserai

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}$$

de telle façon que par exemple y_1, y_2 et y_3 soient les composantes de la quantité de mouvement du corps A .

La force vive T sera alors

$$T = \sum \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \sum \frac{y_i^2}{2m_i}.$$

D'autre part, si l'on choisit les unités de telle façon que la constante de Gauss soit égale à 1, la fonction des forces U s'écrira

$$U = \frac{m_1 m_4}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_4 m_7}{BC}.$$

Si nous posons $F = T - U$; la fonction F dépendra des x et des y et les équations du mouvement pourront se mettre sous la forme canonique

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{dF}{dx_i}. \quad (i=1,2,\dots,9)$$

Supposons maintenant que l'on change de variables et soient

$$x'_i, y'_i, \quad (i=1, 2, \dots, 9)$$

les 18 variables nouvelles. Quelle est la condition pour qu'après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique?

La condition nécessaire et suffisante c'est que

$$\Sigma x'_i dy'_i - \Sigma x_i dy_i$$

soit une différentielle exacte.

Si cette condition est remplie, les équations deviendront

$$(1') \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}.$$

Examinons en particulier le cas où les x'_i sont des fonctions linéaires des x_i et les y'_i des fonctions linéaires des y_i .

La condition précédente peut alors s'énoncer d'une autre manière: la condition nécessaire et suffisante pour que la forme canonique des équations ne soit pas altérée, c'est qu'on ait identiquement

$$(2) \quad \Sigma y'_i x'_i = \Sigma y_i x_i.$$

Faisons une hypothèse plus particulière encore et supposons:

1° Que

x'_1, x'_4, x'_7	dépendent seulement de	x_1, x_4, x_7
x'_2, x'_5, x'_8	dépendent seulement de	x_2, x_5, x_8
x'_3, x'_6, x'_9	dépendent seulement de	x_3, x_6, x_9
y'_1, y'_4, y'_7	dépendent seulement de	y_1, y_4, y_7
y'_2, y'_5, y'_8	dépendent seulement de	y_2, y_5, y_8
y'_3, y'_6, y'_9	dépendent seulement de	y_3, y_6, y_9

2° Que les relations linéaires qui lient x'_2, x'_5, x'_8 à x_2, x_5, x_8 et celles qui lient x'_3, x'_6, x'_9 à x_3, x_6, x_9 soient les mêmes que celles qui lient x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7 ;

3° Que de même les relations linéaires qui lient y'_2, y'_5, y'_8 à y_2, y_5, y_8 et celles qui lient y'_3, y'_6, y'_9 à y_3, y_6, y_9 soient les mêmes que celles qui lient y'_1, y'_4, y'_7 à y_1, y_4, y_7 .

Cette troisième hypothèse est d'ailleurs une conséquence nécessaire des deux premières et de l'identité (2).

Dans ces conditions, l'identité (2) peut être remplacée par la suivante

$$(2') \quad y'_1 x'_1 + y'_4 x'_4 + y'_7 x'_7 = y_1 x_1 + y_4 x_4 + y_7 x_7.$$

Si en effet l'identité (2') a lieu, on en déduira une seconde en augmentant tous les indices d'une unité et une troisième en augmentant encore une fois tous les indices d'une unité. La somme de ces trois identités ne sera autre chose que l'identité (2).

Mais ce n'est pas tout: nous avons supposé que x'_3, x'_6, x'_9 sont liés à x_3, x_6, x_9 , par les mêmes relations que x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7 , et y'_2, y'_5, y'_8 liés à y_2, y_5, y_8 par les mêmes relations que y'_1, y'_4, y'_7 à y_1, y_4, y_7 .

L'identité (2') subsistera donc quand on y changera

$$x_1, x_4, x_7; x'_1, x'_4, x'_7; y_1, y_4, y_7; y'_1, y'_4, y'_7$$

en

$$x_3, x_6, x_9; x'_3, x'_6, x'_9; y_2, y_5, y_8; y'_2, y'_5, y'_8.$$

On aura donc

$$y'_2 x'_3 + y'_5 x'_6 + y'_8 x'_9 = y_2 x_3 + y_5 x_6 + y_8 x_9$$

et de même

$$y'_3 x'_2 + y'_6 x'_5 + y'_9 x'_8 = y_3 x_2 + y_6 x_5 + y_9 x_8$$

et en retranchant

$$\begin{aligned} & y'_2 x'_3 - y'_3 x'_2 + y'_5 x'_6 - y'_6 x'_5 + y'_8 x'_9 - y'_9 x'_8 \\ &= y_2 x_3 - y_3 x_2 + y_5 x_6 - y_6 x_5 + y_8 x_9 - y_9 x_8. \end{aligned}$$

Or le second membre n'est autre chose que le premier *moment de rotation* du système, qui doit être constant en vertu de l'équation des aires. On voit que l'expression de ce moment de rotation en fonction des x' et des y' a la même forme que son expression en fonction des x et des y .

La forme de l'équation des aires n'est donc pas altérée par notre changement de variables.

Premier exemple. — Nous satisferons à l'identité (2') en faisant

$$y_1 = y'_1, \quad y_4 = y'_4, \quad x_7 = x'_7, \quad x_1 - x_7 = x'_1, \quad x_4 - x_7 = x'_4, \\ y'_7 = y_1 + y_4 + y_7.$$

Ce changement de variables, dont nous ferons un fréquent usage dans la suite et que nous appellerons *le changement* (α), a une signification géométrique, très simple.

Les variables nouvelles x'_1, x'_2, \dots, x'_6 sont les coordonnées *relatives* des points A et B par rapport à des axes mobiles passant par le point C .

Les variables $\frac{y_1}{m_1}, \frac{y_2}{m_2}, \dots, \frac{y_6}{m_6}$ sont les composantes des vitesses *absolues* de ces deux points A et B .

Un *second exemple* qui ne diffère pas essentiellement du premier est le suivant

$$x'_1 = x_1 - x_7, \quad x'_4 = x_4 - x_7, \quad x'_7 = \frac{m_1 x_1 + m_4 x_4 + m_7 x_7}{m_1 + m_4 + m_7}, \\ y' = y_1 - \frac{m_1 y'_7}{m_1 + m_4 + m_7}, \quad y'_4 = y_4 - \frac{m_4 y'_7}{m_1 + m_4 + m_7}, \quad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7.$$

J'ai dit que ce second changement de variables ne diffère pas essentiellement du premier, voici pourquoi:

On ne restreint pas la généralité en supposant que le centre de gravité du système est fixe, c'est-à-dire que

$$y_1 + y_4 + y_7 = 0.$$

Si l'on fait cette hypothèse, les valeurs de $x'_1, x'_4, y'_1, y'_4, y'_7$ sont les mêmes dans les deux systèmes; les valeurs de x'_7 seules diffèrent; mais cette différence n'a rien d'essentiel. La fonction F dépend en effet des *différences* des coordonnées des trois points A, B, C . Elle dépend donc de $x'_1 = x_1 - x_7$ et de $x'_4 = x_4 - x_7$; mais elle ne dépend pas de x'_7 .

Troisième exemple. — Avec le troisième exemple je retombe sur un changement de variables connu et que j'appellerai *le changement* (β).

Soient

$$m'_1 = m'_2 = m'_3, \quad m'_4 = m'_5 = m'_6, \quad m'_7 = m'_8 = m'_9$$

trois coefficients constants analogues aux masses. On voit que, pour conserver la symétrie des notations, je représente indifféremment le premier de ces coefficients par m'_1, m'_2 ou m'_3 de même que j'avais représenté indifféremment la masse du corps A par m_1, m_2 ou m_3 .

Soit

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}.$$

Dans ces conditions, les y'_i sont liés aux y_i par les mêmes relations que les $m'_i x'_i$ aux $m_i x_i$ et les identités (2) et (2') peuvent être remplacées par les suivantes

$$(3) \quad \Sigma m'_i x'^2_i = \Sigma m_i x^2_i$$

$$(3') \quad m'_1 x'^2_1 + m'_4 x'^2_4 + m'_7 x'^2_7 = m_1 x^2_1 + m_4 x^2_4 + m_7 x^2_7.$$

L'identité (3) nous montre en outre que la force vive T , exprimée en fonction des nouvelles variables, s'écrira

$$T = \Sigma \frac{m'_i}{2} \left(\frac{dx'_i}{dt} \right)^2 = \Sigma \frac{y'^2_i}{2m'_i}.$$

Ainsi, non seulement avec le changement de variables (3) la forme canonique des équations n'est pas altérée de même que la forme des intégrales des aires, mais il en est de même de la forme de l'équation des forces vives.

Il reste à voir comment on pourra satisfaire à l'identité (3'). Cela peut se faire d'une infinité de manières. Voici celle qui est ordinairement usitée et que nous adopterons.

Soit G le centre de gravité des trois corps; D celui des deux corps A et C .

Nous appellerons x'_7, x'_8, x'_9 les coordonnées du point G ; ξ, η, ζ celles du point D et nous poserons

$$x'_1 = x_1 - x_7, \quad x'_4 = x_4 - \xi,$$

de telle sorte que x'_1, x'_2, x'_3 soient les coordonnées du point A par rapport à des axes mobiles passant par le point C ; et x'_4, x'_5, x'_6 celles du point B par rapport à des axes mobiles passant par le point D .

Nous poserons d'ailleurs

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}; \qquad m'_7 = m_1 + m_4 + m_7.$$

Les propriétés du changement de variables (β) ainsi défini ont été étudiées par M. RADAU (Annales de l'École Normale, 1^{ère} série, tome 5).

Les deux changements de variables (α) et (β) ont d'ailleurs en commun la propriété de ne pas altérer la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires; de plus, ils permettent d'abaisser de 9 à 6 le nombre des degrés de liberté.

En effet, dans l'un et l'autre cas, la fonction F ne dépend que des y' et des six premières variables x'_i ; mais elle est indépendante de x'_7, x'_8 et x'_9 . D'autre part, on ne restreint pas la généralité en supposant le centre de gravité fixe, ce qui entraîne les égalités

$$y'_7 = y'_8 = y'_9 = 0.$$

Si l'on annule donc y'_7, y'_8, y'_9 , F ne dépend plus que des douze variables x'_i et y'_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) et les équations (1') peuvent s'écrire

$$(1'') \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = - \frac{dF}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

avec six degrés de liberté seulement.

Méthode usuelle.

Malgré les avantages que présente le changement (β) et bien qu'il soit connu depuis longtemps, on sait qu'il n'est pas le plus usité dans la pratique. On lui préfère d'ordinaire un changement de variables que

j'appellerai *le changement* (γ) et dont les propriétés sont loin d'être aussi élégantes. On pose

$$m'_7 = m_1 + m_4 + m_7; \quad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7 = m'_7 \frac{dx'_7}{dt};$$

$$m'_7 x'_7 = m_1 x_1 + m_4 x_4 + m_7 x_7;$$

$$x'_1 = x_1 - x_7, \quad x'_2 = x_2 - x_8, \quad x'_3 = x_3 - x_9,$$

$$x'_4 = x_4 - x_7, \quad x'_5 = x_5 - x_8, \quad x'_6 = x_6 - x_9,$$

$$m'_i = m_i, \quad (i=1,2,\dots,6)$$

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}, \quad (i=1,2,\dots,9)$$

On voit que x'_7, x'_8, x'_9 sont les coordonnées du centre de gravité G ; que $x'_1, x'_2, x'_3; x'_4, x'_5, x'_6$ sont, comme dans le changement (α), les coordonnées *relatives* des points A et B par rapport à des axes mobiles passant par le point C . Mais les variables

$$\frac{y'_i}{m_i}, \quad (i=1,2,\dots,6)$$

au lieu de représenter, comme dans le changement (α) les composantes des vitesses *absolues* des points A et B , représentent les composantes des vitesses *relatives* de ces deux points par rapport aux axes mobiles.

Il est aisé de voir que le changement (γ) ne satisfait pas aux identités (2), (2'), (3) et (3'); il ne conservera donc ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires.

Supposons cependant que le centre de gravité soit fixe; de telle sorte que $y'_7 = y'_8 = y'_9 = 0$; on sait que les équations pourront se mettre sous la forme suivante, que l'on pourrait appeler *semi-canonique*:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF'_1}{dy'_i}, & \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF'_1}{dx'_i}, & (i=1,2,3) \\ \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF'_2}{dy'_i}, & \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF'_2}{dx'_i}, & (i=4,5,6) \end{cases}$$

où

$$F_1 = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{BC^3} (x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6');$$

$$F_2 = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{AC^3} (x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6').$$

On voit en quoi les douze équations (4) diffèrent des équations canoniques.

La fonction qui joue le rôle de la fonction F n'est pas la même dans ces douze équations; elle est égale à F_1 dans six d'entre elles et à F_2 dans les six autres. C'est ce que l'on exprime quelquefois en disant que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour les deux planètes.

Élimination des nœuds.

Ce qu'on doit appeler l'*orbite osculatrice* du point A ou du point B n'est pas la même chose suivant que l'on adopte le changement (α) ou l'un des changements (β) ou (γ) .

Dans l'hypothèse (α) , le plan de l'orbite de A passe par la droite AC et par la vitesse *absolue* du point A et le plan de l'orbite de B passe par la droite BC et par la vitesse *absolue* du point B (je suppose toujours le centre de gravité fixe).

Dans l'hypothèse (β) le plan de l'orbite de A passe par la droite AC et par la vitesse *relative* du point A par rapport à C ; le plan de l'orbite de B passe par la droite BD et par la vitesse *relative* du point B par rapport à D .

Dans l'hypothèse (γ) le plan de l'orbite de A passe par la droite AC et par la vitesse *relative* du point A par rapport à C ; le plan de l'orbite de B passe par la droite BC et par la vitesse *relative* du point B par rapport à C .

Nous avons vu que les changements (α) et (β) conservent la forme des intégrales des aires, mais il n'en est pas de même du changement (γ) . Il en résulte une importante propriété des orbites.

Dans l'hypothèse (α) comme dans l'hypothèse (β) , l'intersection des plans des deux orbites est dans le plan invariable, mais il n'en est plus de même dans l'hypothèse (γ) .

Il semble que tous ces avantages auraient dû faire substituer le changement (β) au changement (γ) . Si on ne l'a pas fait, c'est sans doute parce que le développement de la fonction perturbatrice est un peu plus compliqué dans l'hypothèse (β) . C'est pour cette raison que je crois devoir attirer l'attention sur le changement (α) qui n'a pas encore été proposé, *qui n'altère ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires et qui conduit à un développement de la fonction perturbatrice tout aussi simple que le changement (β)* . C'est ce dont nous nous rendrons mieux compte en comparant dans les trois cas la forme du développement.

Mouvement elliptique.

Soit une masse mobile m attirée par une masse fixe M située à l'origine, son mouvement sera képlérien.

Soient $a, e, i, l, g + \theta$, et θ le demi grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, l'anomalie moyenne, la longitude du périhélie et celle du nœud. Soit

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad \Theta = G \cos i.$$

Nous pouvons exprimer les trois coordonnées x_1, x_2, x_3 de la masse mobile m en fonction des six variables, $L, G, \Theta, l, g, \theta$; écrivons donc

$$x_i = \varphi_i(L, G, \Theta, l, g, \theta). \quad (i=1,2,3)$$

Posons d'autre part, en appelant n le moyen mouvement,

$$y_i = m \frac{dx_i}{dt} = nm \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{m\sqrt{M}}{L^3} \frac{d\varphi_i}{dt}.$$

Les fonctions φ_i jouissent de deux propriétés qui nous seront utiles dans la suite; elles satisfont d'abord à l'intégrale des forces vives

$$\frac{\sum y^2}{2m} - \frac{mM}{\sqrt{\sum x^2}} = -\frac{mM}{2L^2}.$$

D'autre part, l'expression

$$\sum y dx = m\sqrt{M}(Ldl + Gdg + \Theta d\theta)$$

est une différentielle exacte.

Emploi des variables képlériennes.

Considérons les variables x'_i et y'_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) définies par l'un des trois changements (α) , (β) ou (γ) ; nous allons faire un nouveau changement de variables en remplaçant ces douze variables par douze variables nouvelles

$$L, G, \theta, l, g, \theta,$$

$$L', G', \theta', l', g', \theta'.$$

Ces douze variables nouvelles seront définies de la manière suivante; nous poserons

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_k = \varphi_k(L, G, \theta, l, g, \theta) \\ y'_k = \frac{\beta}{L^3} \frac{d\varphi_k}{dl} \end{array} \right. \quad (k=1,2,3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_k = \varphi_{k-3}(L', G', \theta', l', g', \theta') \\ y'_k = \frac{\beta'}{L'^3} \frac{d\varphi_{k-3}}{dl'}. \end{array} \right. \quad (k=4,5,6)$$

Les douze variables définies par ces équations (5) pourront s'appeler *variables képlériennes*, ou bien *éléments osculateurs des deux corps A et B*.

Il importe de remarquer que ces éléments osculateurs ne sont pas les mêmes selon qu'on adopte le changement (α) ou l'un des changements (β) ou (γ) . J'ajouterai même que, si l'on adopte l'un de ces changements, le changement (α) par exemple, la définition des éléments osculateurs dépend encore du choix des deux constantes β et β' , choix que nous ferons dans la suite de façon à simplifier les équations autant que possible.

Dans tous les cas, les expressions

$$y'_1 dx'_1 + y'_2 dx'_2 + y'_3 dx'_3 - \beta (Ldl + Gdg + \theta d\theta)$$

$$y'_4 dx'_4 + y'_5 dx'_5 + y'_6 dx'_6 - \beta' (L'dl' + G'dg' + \theta'd\theta')$$

sont des différentielles exactes, de sorte qu'après ce nouveau changement de variables, les équations du mouvement conserveront la forme canonique dans les hypothèses (α) et (β) et la forme semi-canonique dans l'hypothèse (γ) .

Dans les hypothèses (α) et (β) les équations s'écriront

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dl}{dt} = \frac{dF}{\beta dL}, & \frac{dL}{dt} = -\frac{dF}{\beta dl}, \\ \frac{dl'}{dt} = \frac{dF}{\beta' dL'}, & \frac{dL'}{dt} = -\frac{dF}{\beta' dl'}. \end{cases}$$

Dans l'hypothèse (γ) elles s'écriront

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{dl}{dt} = \frac{dF_1}{\beta dL}, & \frac{dL}{dt} = -\frac{dF_1}{\beta dl}, \\ \frac{dl'}{dt} = \frac{dF_2}{\beta' dL'}, & \frac{dL'}{dt} = -\frac{dF_2}{\beta' dl'}. \end{cases}$$

Aux quatre équations (6), comme aux quatre équations (6'), il faut adjoindre celles qu'on en déduirait en changeant L, l, L', l' en G, g, G', g' et celles qu'on en déduirait en changeant L, l, L', l' en $\theta, \theta, \theta', \theta'$.

D'autre part, on aura

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2}{2} - \frac{\beta^2}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} = -\frac{\beta^2}{2L^2}, \\ \frac{y_4'^2 + y_5'^2 + y_6'^2}{2} - \frac{\beta'^2}{\sqrt{x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2}} = -\frac{\beta'^2}{2L'^2}. \end{cases}$$

Forme de la fonction perturbatrice.

Nous distinguerons dans la fonction F quatre parties et nous poserons

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4.$$

Dans le cas (γ) , où au lieu d'une seule fonction F on a à considérer les deux fonctions F_1 et F_2 , nous poserons

$$F_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,$$

$$F_2 = f_1' + f_2' + f_3' + f_4'.$$

Le premier terme f_1 (ou f_1') sera le premier terme képlérien; f_2 sera le second terme képlérien, f_3 sera la partie principale de la fonction perturbatrice, f_4 sera la partie complémentaire de la fonction perturbatrice.

1° Dans l'hypothèse (α), nous aurons

$$F = T - U, \quad T = S \left[\frac{y_1'^2}{2m_1} + \frac{y_4'^2}{2m_4} + \frac{(y_1' + y_4')^2}{2m_7} \right].$$

Le signe S représente une sommation s'étendant aux trois axes des coordonnées, et je puis écrire également

$$T = S \left(\frac{y_1'^2}{2m_1'} + \frac{y_4'^2}{2m_4'} + \frac{y_1' y_4'}{m_7} \right);$$

en posant, pour abréger,

$$m_1' = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \quad m_4' = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}.$$

Je poserai

$$\begin{aligned} f_1 &= S \frac{y_1'^2}{2m_1'} - \frac{m_1 m_7}{AC}; & f_2 &= S \frac{y_4'^2}{2m_4'} - \frac{m_4 m_7}{BC}; \\ f_3 &= -\frac{m_1 m_4}{AB}; & f_4 &= S \frac{y_1' y_4'}{m_7}. \end{aligned}$$

Si nous prenons

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \quad \beta' = \frac{m_4 m_7}{\sqrt{m_4 + m_7}},$$

les équations (7) donneront

$$f_1 = -\frac{m_1 m_7}{2L^2}, \quad f_2 = -\frac{m_4 m_7}{2L'^2}.$$

2° Dans l'hypothèse (β), nous avons

$$T = S \left(\frac{y_1'^2}{2m_1'} + \frac{y_4'^2}{2m_4'} \right),$$

et nous poserons

$$\begin{aligned} f_1 &= S \frac{y_1'^2}{2m_1'} - \frac{m_1 m_7}{AC}, & f_2 &= S \frac{y_4'^2}{2m_4'} - \frac{m_4 m_7}{BD}, \\ f_3 &= -\frac{m_1 m_4}{AB}, & f_4 &= \frac{m_1 m_7}{BD} - \frac{m_4 m_7}{BC}. \end{aligned}$$

En prenant

$$\beta = \frac{m_1 m_7}{\sqrt{m_1 + m_7}}, \quad \beta' = \sqrt{m_4 m_1 m_7} = m_4 \sqrt{\frac{m_7(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}},$$

il viendra

$$f_1 = -\frac{m_1 m_7}{2L^2}, \quad f_2 = -\frac{m_4 m_7}{2L'^2}.$$

3° Dans l'hypothèse (γ), nous poserons

$$f_1 = f'_1 = S \frac{y_1'^2}{2m_1} - \frac{m_1(m_1 + m_7)}{AC},$$

$$f_2 = f'_2 = S \frac{y_4'^2}{2m_4} - \frac{m_4(m_4 + m_7)}{BC},$$

$$f_3 = f'_3 = -\frac{m_1 m_4}{AB}, \quad f_4 = \frac{m_1 m_4}{BC^3} Sx'_1 x'_4, \quad f'_4 = \frac{m_1 m_4}{AC^3} Sx'_1 x'_4.$$

En prenant

$$\beta = m_1 \sqrt{m_1 + m_7}, \quad \beta' = m_4 \sqrt{m_4 + m_7},$$

il viendra

$$f_1 = f'_1 = \frac{-m_1(m_1 + m_7)}{2L^2}, \quad f_2 = f'_2 = \frac{-m_4(m_4 + m_7)}{2L'^2},$$

Première approximation. Nous regarderons la masse m_7 comme finie et les masses m_1 et m_4 comme très petites du premier ordre. Dans ces conditions β et β' sont du premier ordre, f_1 et f_2 sont du premier ordre; f_3 et f_4 (comme f'_4) sont du second ordre. On remarquera d'abord qu'aux quantités près du second ordre, les valeurs de $\frac{f_1}{\beta}$, $\frac{f_2}{\beta'}$, $\frac{f_3}{\beta}$, $\frac{f_4}{\beta'}$ sont les mêmes dans les trois hypothèses (α), (β) et (γ); à ce degré d'approximation, les équations différentielles auxquelles conduisent les trois hypothèses ne diffèrent que par les termes qui dépendent des dérivées de f_4 .

Soit

$$\phi = Sx'_1 x'_4 = x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6.$$

La fonction ϕ sera une fonction des douze variables képlériennes dont le développement est connu et d'ailleurs relativement aisé à obtenir.

Si l'on observe d'autre part que

$$y_1 = \frac{\beta}{L^3} \frac{dx'_1}{dl}, \quad \frac{x'_1}{AC^3} = -\frac{1}{L^6} \frac{d^2 x'_1}{dl^2},$$

$$y'_4 = \frac{\beta'}{L'^3} \frac{dx'_4}{dl'}, \quad \frac{x'_4}{BC^3} = -\frac{1}{L'^6} \frac{d^2 x'_4}{dl'^2},$$

on aura donc:

Dans l'hypothèse (α)

$$f_4 = \frac{\beta\beta'}{m_7 L_3 L'_3} \frac{d^2 \psi}{dl dl'}$$

exactement;

Dans l'hypothèse (β)

$$f_4 = \frac{-m_1 m_4}{L'^6} \frac{d^2 \psi}{dl'^2}$$

aux quantités près du troisième ordre;

Dans l'hypothèse (γ)

$$f_4 = \frac{-m_1 m_4}{L'^6} \frac{d^2 \psi}{dl'^2}$$

exactement;

$$f'_4 = \frac{-m_1 m_4}{L'^6} \frac{d^2 \psi}{dl'^2}$$

exactement.

Tous ces développements de f_4 et de f'_4 se déduisent immédiatement les uns des autres. A ce degré d'approximation, les trois méthodes sont équivalentes au point de vue de la facilité du développement de la fonction perturbatrice.

D'autre part, si l'on ne tient compte que des perturbations du premier ordre, on n'est pas gêné par le fait que les équations (4) ne sont pas canoniques. Donc, à ce premier degré d'approximation, les trois méthodes se valent.

Deuxième approximation. Mais il n'en est plus de même si l'on veut tenir compte des perturbations du second ordre; la forme non canonique des équations (4) devient alors un grave inconvénient; d'un autre côté, le développement de la fonction perturbatrice auquel il n'y a rien

à changer dans les hypothèses (α) et (γ) devient très compliqué dans l'hypothèse (β) . Le changement de variables (α) que je propose prend alors un avantage marqué.

Il a toutefois son inconvénient propre, plus apparent que réel, au point de vue de l'osculation. Supposons que l'on veuille calculer la position de la planète A , par exemple, à l'aide des éléments osculateurs, à l'époque t . Si l'on définit ces éléments osculateurs comme on le fait dans les hypothèses (β) et (γ) , les coordonnées ainsi calculées sont exactes à l'époque t , et pour l'époque $t + \varepsilon$, l'erreur est de l'ordre de $\varepsilon^2 \zeta$. Si on les définit comme dans l'hypothèse (α) , les coordonnées sont encore exactes pour l'époque t ; mais pour l'époque $t + \varepsilon$, l'erreur est de l'ordre de ε . Il ne faut pas s'exagérer cependant l'importance de cet inconvénient. Si ε est comparable à la durée de révolution, l'erreur est du même ordre de grandeur que celle qui est due aux perturbations; elle est du même ordre dans tous les cas. Si ε est très petit par rapport à la durée de révolution, la correction est extrêmement faible et de plus très facile.

PERIODIC ORBITS

BY

G. H. DARWIN

of CAMBRIDGE.

§ 1. *Introduction.*

The existing methods of treating the Problem of the three Bodies are only applicable to the determination, by approximation, of the path of the third body when the attraction of the first largely preponderates over that of the second. A general solution of the problem is accordingly not to be obtained by these methods.

In the Lunar and Planetary theories it has always been found necessary to specify the motion of the perturbed body by reference to a standard curve or intermediate orbit, of which the properties are fully known. The degree of success attained by any of these methods has always depended on the aptness of the chosen intermediate orbit for the object in view. It is probable that future efforts will resemble their precursors in the use of standard curves of reference.

Mr G. W. HILL's papers on the Lunar Theory¹ mark an epoch in the history of the subject. His substitution of the Variational Curve for the ellipse as the intermediate orbit is not only of primary importance in the Lunar Theory itself, but has pointed the way towards new fields of research.

The variational curve may be described as the distortion of the moon's circular orbit by the solar attraction. It is one of that class

¹ American Journal of Mathematics, Vol. 1 pp. 5—29, 129—147, 245—260 and Acta Mathematica, T. 8 pp. 1—36.

of periodic solutions of the Problem of the three Bodies which forms the subject of the present paper.

Of these solutions M. POINCARÉ writes:

»Voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.»

»Étant données des équations de la forme définie dans le n° 13 et une solution particulière de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.»¹

He tells us that he has been led to distinguish three kinds of periodic solutions. In those of the first kind the inclinations vanish and the eccentricities are very small; in those of the second kind the inclinations vanish and the eccentricities are finite; and in those of the third kind the inclinations do not vanish.²

If I understand this classification correctly the periodic orbits, considered in this paper, belong to the first kind, for they arise when the perturbed body has infinitely small mass, and when the two others revolve about one another in circles.

M. POINCARÉ remarks that there is a quadruple infinity of periodic solutions, for there are four arbitrary constants viz. the period of the infinitesimal body, the constant of energy, the moment of conjunction, and the longitude of conjunction.³ For the purpose of the present investigation this quadruple infinity may however be reduced to a single infinity, for the moment and longitude of conjunction need not be considered; and the scale on which we draw the circular orbit of the second body round the first is immaterial. Thus we are only left with the constant of relative energy of the motion of the infinitesimal body as a single arbitrary.

¹ *Mécanique Céleste*, T. I, p. 82.

² » » » T. I, p. 97, and *Bull. Astr.*, T. I, p. 65.

³ » » » T. I, p. 101.

Notwithstanding the great interest attaching to periodic orbits, no suggestion has, up to the present time, been made by any writer for a general method of determining them. As far as I can see, the search resolves itself into the discussion of particular cases by numerical processes, and such a search necessarily involves a prodigious amount of work. It is not for me to say whether the enormous labour I have undertaken was justifiable in the first instance; but I may remark that I have been led on, by the interest of my results, step by step, to investigate more and again more cases. Now that so much has been attained I cannot but think that the conclusions will prove of interest both to astronomers and to mathematicians.

In conducting extensive arithmetical operations, it would be natural to avail oneself of the skill of professional computers. But unfortunately the trained computer, who is also a mathematician, is rare. I have thus found myself compelled to forego the advantage of the rapidity and accuracy of the computer, for the higher qualities of mathematical knowledge and judgment.

In my earlier work I received the greatest assistance from Mr J. W. F. ALLNUTT; his early death has deprived me of a friend and of an assistant, whose zeal and care were not to be easily surpassed. Since his death Mr J. I. CRAIG (of Emmanuel College) and Mr M. J. BERRY (of Trinity College) have rendered and are rendering valuable help. I have besides done a great deal of computing myself.¹

The reader will see that the figures have been admirably rendered by Mr EDWIN WILSON of Cambridge, and I only regret that it has not seemed expedient to give them on a larger scale.

The first part of the paper is devoted to the mathematical methods employed, the second part contains the discussion of the results, and the tables of numerical results are relegated to an Appendix.

¹ About two thirds of the expense of these computations have been met by grants from the Government Grant and Donation Funds of the Royal Society.

PART. I.

§ 2. *Equations of motion.*

The particular case of the problem of the three bodies, considered in this paper, is where the mass of the third body is infinitesimal compared with that of either of the two others which revolve about one another in circles, and where the whole motion takes place in one plane.

For the sake of brevity the largest body will be called the Sun, the planet which moves round it will be called Jove, and the third body will be called the planet or the satellite, as the case may be.

Jove J , of unit mass, moves round the Sun S , of mass ν , in a circle of unit radius SJ , and the orbit to be considered is that of an infinitesimal body P moving in the plane of Jove's orbit.

Let S be the origin of rectangular axes; let SJ be the x axis, and let the y axis be such that a rotation from x to y is consentaneous with the orbital motion of J . Let x, y be the heliocentric coordinates of P , so that $x-1, y$ are the jovicentric coordinates referred to the same x axis and a parallel y axis.

Let r denote SP , and θ the angle JSP ; let ρ denote JP , and let the angle SJP be $180^\circ - \phi$. Thus r, θ are the polar heliocentric coordinates, and ρ, ϕ the polar jovicentric coordinates of P .

Let n denote Jove's orbital angular velocity, so that in accordance with KEPLER'S law

$$n^2 = \nu + 1.$$

The equations of motion of a particle referred to axes rotating with angular velocity ω , under the influence of forces whose potential is U , are

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dX}{dt} - \omega Y \right) - \omega \left(\frac{dY}{dt} + \omega X \right) &= \frac{\partial U}{\partial X}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dY}{dt} + \omega X \right) + \omega \left(\frac{dX}{dt} - \omega Y \right) &= \frac{\partial U}{\partial Y}, \end{aligned}$$

where t is the time.

Now in the present problem, if the origin be taken at the centre of inertia of the Sun and Jove with SJ for the X axis, the coordinates

of P are $X = x - \frac{1}{\nu + 1}$, $Y = y$. Also the potential function is $\frac{\nu}{r} + \frac{1}{\rho}$. Hence the equations of motion are

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} - (\nu + 1) \left(x - \frac{1}{\nu + 1} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu}{r} + \frac{1}{\rho} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} - (\nu + 1)y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{r} + \frac{1}{\rho} \right).\end{aligned}$$

But $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = (x - 1)^2 + y^2$. Hence if we put

$$(1) \quad 2\Omega = \nu \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right),^1$$

the equations of motion may be written

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{cases}$$

where $n^2 = \nu + 1$.

Let the second of (1) be multiplied by $2 \frac{dx}{dt}$, and the third by $2 \frac{dy}{dt}$, let the two be added together and integrated, and we have JACOBI'S integral

$$(2) \quad V^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 2\Omega - C,$$

where C is a constant, and V denotes the velocity of P relatively to the rotating axes.

Let s be the arc of the planet's relative orbit measured from any fixed point, and let φ be the inclination to the x axis of the outward normal of the orbit. Then

$$\frac{dx}{ds} = -\sin \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \varphi.$$

¹ It is perhaps worth noting that 2Ω may be written in the form

$$\nu(r-1)^2 \left(1 + \frac{2}{r} \right) + (\rho-1)^2 \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) + 3(\nu+1).$$

Hence if P be the component of inward effective force,

$$(3) \quad P = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \sin \varphi.$$

Therefore

$$PV = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dx}{dt}.$$

Now if R denotes the radius of curvature at the point x, y , of the relative orbit of P ,

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dy}{dt}}{\left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

On substituting for the second differentials from (1), we have

$$\frac{V^3}{R} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{dy}{dt} - 2n \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right].$$

Hence by means of (2) and (3)

$$(4) \quad \frac{1}{R} = \frac{P}{V^2} - \frac{2n}{V}.$$

If the value of Ω in (1) be substituted in (3) we easily find

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \nu \left(\frac{1}{r^2} - r \right) \cos(\varphi - \theta) + \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho \right) \cos(\varphi - \phi), \\ \text{and} \\ V^2 = \nu \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right) - C. \end{array} \right.$$

Thus the curvature at any point of the orbit is expressible in terms of the coordinates and of the direction of the normal. If $s_0, \varphi_0, x_0, y_0, t_0$ be the initial values of the same quantities, it is clear that

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{R}, \\ x = x_0 - \int_{s_0}^s \sin \varphi \, ds, \\ y = y_0 + \int_{s_0}^s \cos \varphi \, ds, \\ n(t - t_0) = \int_{s_0}^s \frac{n}{V} \, ds. \end{array} \right.$$

Also the polar coordinates of P relatively to axes fixed in space with heliocentric origin are $r, \theta + n(t - t_0)$, and with jovicentric origin are $\rho, \phi + n(t - t_0)$.

Hence the determination of x and y involves in each case two integrations, and another integration is necessary to find the time, and the orbit in space.

§ 3. *Partition of relative space according to the value of the relative energy.*¹

It may be easily shown that the function Ω arises from three sources, and that it is the sum of the rotation potential, the potential of the Sun and the disturbing function for motion relatively to the Sun. Hence Ω is the potential of the system, inclusive of the rotation potential. Thus the equation $V^2 = 2\Omega - C$ may be called the equation of relative energy.

For a real motion of the planet V^2 must be positive, and therefore 2Ω must be greater than C . Accordingly the planet can never cross the curve represented by $2\Omega = C$, and if this curve has a closed branch

¹ A somewhat similar investigation is contained in a paper by M. BOHLIN, *Acta Math.* T. 10, p. 109 (1887). The author takes the Sun as a fixed centre, which is equivalent to taking the Sun's mass as very large compared with that of Jove; he thus fails to obtain the function Ω in the symmetrical form used above.

with P inside, it must always remain inside; or if P be outside, it must always remain so.

This is Mr HILL's result in his celebrated memoir¹ on the Lunar Theory, save that the value of \mathcal{Q} used here has not been reduced to an approximate form.

We shall now proceed to a consideration of the family of curves $2\mathcal{Q} = C$. That is to say we shall find, for a given value of C , the locus of points for which the three bodies may move for an instant as parts of a single rigid body. We are clearly at the same time finding the curves of constant velocity relatively to the moving axes for other values of C .

For any given value of ρ , the values of r are the roots of the cubic equation

$$r^2 + \frac{2}{r} = \frac{1}{\nu} \left(C - \rho^2 - \frac{2}{\rho} \right).$$

If C' be written for the value of the right hand of this equation, the cubic becomes

$$r^3 - C'r + 2 = 0.$$

The solution is

$$r = 2 \sqrt{\frac{1}{3} C'} \cos \alpha, \quad \text{where} \quad \cos 3\alpha = -C'^{-\frac{3}{2}} \sqrt{27}.$$

In order that α may be a real angle, such a value of ρ must be assumed that C' may be greater than 3, or $\rho^2 + \frac{2}{\rho}$ less than $C - 3\nu$. The limiting form of this last inequality is $\rho^2 + \frac{2}{\rho} = C - 3\nu$, a cubic of the same form as before. Hence it follows that $C - 3\nu$ must be greater than 3. Thus the minimum value of C is $3(\nu + 1)$.

With C greater than $3(\nu + 1)$, let β be the smallest positive angle such that $\cos 3\beta = C'^{-\frac{3}{2}} \sqrt{27}$. Then β is clearly less than 30° , and the three roots of the cubic are

$$2 \sqrt{\frac{1}{3} C'} \cos(60^\circ \pm \beta), \quad -2 \sqrt{\frac{1}{3} C'} \cos \beta.$$

¹ Amer. Journ. of Math. Vol. 1, pp. 5—29.

The third of these roots is essentially negative, and may be omitted as not corresponding to a geometrical solution. But the first two roots are positive and will give a real geometrical meaning to the solution provided that if $\rho > 1$,

$$\begin{aligned} r &< \rho + 1 \\ &> \rho - 1; \end{aligned}$$

and if $\rho < 1$,

$$\begin{aligned} r &< \rho + 1 \\ &> 1 - \rho. \end{aligned}$$

In some cases there are two solutions, in others one and in others none.

By the solution of a number of cubic equations I have found a number of values of r, ρ which satisfy $2Q = C$, and have thus traced the curves in Fig. 1, to the consideration of which I shall return below.

Some idea of the nature of the family of curves may be derived from general considerations; for when r and ρ are small the equation approximates to $\frac{2\nu}{r} + \frac{2}{\rho} = C$, and the curves are like the equipotentials due to two attractive particles of masses 2ν and 2 .

Thus for large values of C they are closed ovals round S and J , the one round S being the larger. As C declines the ovals swell and coalesce into a figure-of-8, which then assumes the form of an hour-glass with a gradually thickening neck.

When on the other hand r and ρ are large the equation approximates to $\nu r^2 + \rho^2 = C$, and this represents an oval enclosing both S and J , which decreases in size as C decreases.

It is thus clear by general reasoning that for large values of C the curve consists of two closed branches round S and J respectively, and of a third closed branch round both S and J . The spaces within which the velocity of the planet is real are inside of either of the smaller ovals, and outside of the larger one. Since the larger oval shrinks and the hour-glass swells, as C declines, a stage will be reached when the two curves meet and coalesce. This first occurs at the end of the small bulb of the hour-glass which encloses J . The curve is then shaped like a horse-shoe, but is narrow at the toe and broad at the two points.

For still smaller values of C , the horse-shoe narrows to nothing at the toe, and breaks into two elongated pieces. These elongated pieces, one on each side of SJ , then shrink quickly in length and slowly in breadth, until they contract to two points when C reaches its minimum.

This sketch of the sequence of changes shows that there are four critical stages in the history of the curves,

(α) when the internal ovals coalesce to a figure-of-8;

(β) when the small end of the hour-glass coalesces with the external oval;

(γ) when the horse-shoe breaks;

(δ) when the halves of the broken shoe shrink to points.

The points of coalescence and rupture in (α), (β), (γ) are obviously on the line SJ (produced either way), and the points in (δ) are symmetrically situated on each side of SJ .

We must now consider the physical meaning of the critical points, and show how to determine their positions.

In the first three cases the condition which enables us to find the critical point is that a certain equation derived from $2Q=C$ shall have equal roots.

(α) The coalescence into a figure-of-8 must occur between S and J ; hence $r = 1 - \rho$, and $2Q = C$ becomes

$$(6) \quad \nu \left[(1 - \rho)^2 + \frac{2}{1 - \rho} \right] + \rho^2 + \frac{2}{\rho} = C.$$

This equation must have equal roots. Accordingly by differentiation we find that ρ must satisfy,

$$-\nu(1 - \rho) + \frac{\nu}{(1 - \rho)^2} + \rho - \frac{1}{\rho^2} = 0,$$

or

$$(\nu + 1)\rho^5 - (3\nu + 2)\rho^4 + (3\nu + 1)\rho^3 - \rho^2 + 2\rho - 1 = 0,$$

a quintic equation from which ρ may be found.

This equation may be put in the form,

$$(3\nu + 1)\rho^3 = 1 - \frac{\rho(1 - \rho^3)\left(1 - \frac{2}{3}\rho\right)}{1 - \rho + \frac{1}{3}\rho^2}.$$

When the Sun is large compared with Jove ν is large, and ρ is obviously small, and we have approximately

$$(3\nu + 1)^{\frac{1}{3}}\rho = 1 - \frac{1}{3}\rho,$$

whence

$$(7) \quad \rho = \frac{1}{(3\nu + 1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}}.$$

If this value of ρ be substituted in (6) we obtain the approximate result

$$(8) \quad C = 3\nu + \frac{2\nu}{3\nu + 1} + 3(3\nu + 1)^{\frac{1}{3}}.$$

In this paper the value adopted for ν is 10, and the approximate formulæ (7) and (8) give

$$\rho = .28779, \quad r = .71221, \quad C = 40.0693.$$

The correct results derived from the quintic equation and from the full formula for C are

$$(9) \quad \rho = .28249, \quad r = .71751, \quad C = 40.1821.$$

Thus for even so small a value of ν as 10, the approximation is near the truth, and for such cases as actually occur in the solar system it would be accurate enough for every purpose.

The formula from which ρ has been derived is equivalent to $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, and since $y = 0$, we have also $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Hence the point is one of zero effective force at which the planet may revolve without motion relatively to the Sun and Jove.

This position of conjunction between the two larger bodies is obviously one of dynamical instability.

(β) The coalescence of the hour-glass with the external oval must occur at a point in SJ produced beyond J ; hence $r = 1 + \rho$, and $2Q = C$ becomes

$$\nu \left[(1 + \rho)^2 + \frac{2}{1 + \rho} \right] + \rho^2 + \frac{2}{\rho} = C.$$

This equation must have equal roots, and ρ must satisfy

$$\nu(1 + \rho) - \frac{\nu}{(1 + \rho)^2} + \rho - \frac{1}{\rho^2} = 0,$$

or

$$(\nu + 1)\rho^5 + (3\nu + 2)\rho^4 + (3\nu + 1)\rho^3 - \rho^2 - 2\rho - 1 = 0.$$

This quintic equation may be written in the form

$$(3\nu + 1)\rho^3 = 1 + \frac{\rho(1 - \rho^3)\left(1 + \frac{2}{3}\rho\right)}{1 + \rho + \frac{1}{3}\rho^2}.$$

With the same approximation as in (α)

$$(10) \quad \rho = \frac{1}{(3\nu + 1)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3},$$

$$(11) \quad C = 3\nu - \frac{2\nu}{3\nu + 1} + 3(3\nu + 1)^{\frac{1}{3}}.$$

When ν is 10, the approximate formulæ (10), (11) give

$$\rho = .35612, \quad r = 1.35612, \quad C = 38.7790.$$

The correct results derived from the quintic equation are

$$(12) \quad \rho = .34700, \quad r = 1.34700, \quad C = 38.8760.$$

The approximation is not so good as in (α), but in such cases as actually occur in the solar system the formulæ (10), (11) would lead to a high degree of accuracy.

This second critical point is another one at which the planet may revolve without motion relatively to the Sun and Jove, and such a motion is dynamically unstable.

(γ) The thinning of the toe of the horse-shoe to nothing must occur at a point in JS produced beyond S ; hence $\rho = r + 1$, and $2\Omega = C$ becomes

$$\nu\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + (r + 1)^2 + \frac{2}{r + 1} = C.$$

This equation must have equal roots, and r must satisfy

$$\nu\left(r - \frac{1}{r^2}\right) + (r + 1) - \frac{1}{(r + 1)^2} = 0.$$

or

$$(\nu + 1)r^5 + (2\nu + 3)r^4 + (\nu + 3)r^3 - \nu(r^2 + 2r + 1) = 0,$$

a quintic for finding r .

If we put $r = 1 - \xi$, the equation becomes

$$(\nu + 1)\xi^5 - (7\nu + 8)\xi^4 + (19\nu + 25)\xi^3 - (24\nu + 37)\xi^2 + (12\nu + 26)\xi - 7 = 0.$$

This equation may be solved by approximation, and the first approximation, which is all that I shall consider, gives

$$(13) \quad \xi = 1 - r = \frac{7}{12\nu + 26}.$$

Thus the approximate solution is $r = 1 - \frac{7}{12\nu + 26}$.

We also find

$$(14) \quad C = \nu(1 - 2\xi + \xi^2 + 2 + 2\xi + 2\xi^2 \dots) + 4 - 4\xi + \xi^2 + 1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 \\ - 3\nu + 5 - \frac{7}{2}\xi + \left(3\nu + \frac{5}{4}\right)\xi^2.$$

If we take only the term in ξ in (14), and put $\nu = 10$ the approximate result is

$$r = .95205, \quad \rho = 1.95205, \quad C = 34.9012.$$

The exact solution derived from the quintic equation is

$$(15) \quad r = .94693, \quad \rho = 1.94693, \quad C = 34.9054.$$

With large values of ν the first approximation would give nearly accurate results. This critical point is another one at which the three bodies may move round without relative motion, but as before the motion is dynamically unstable.

(*d*) The fourth and last critical position occurs when C is a minimum. Now C is a minimum when $\frac{\partial C}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial C}{\partial \rho} = 0$; whence $r = 1$, $\rho = 1$, and $C = 3\nu + 3$. We arrived above at this minimum value of C from another point of view.

If an equilateral triangle be drawn on SJ , its vertex is at this fourth critical point; and since this vertex may be on either the positive or negative side of SJ , there are two points of this kind.

It is well known that there is an exact solution of the problem of three bodies in which they stand at the corners of an equilateral triangle, which revolves with a uniform angular velocity. The motion is stable in this case.

Thus all the five critical points correspond with particular exact solutions of the problem, and of these solutions three are unstable and the symmetrical pair is stable.

Fig. 1 represents the critical curves of the family $2\Omega = C$, for the case $\nu = 10$. The points in the curves were determined, as explained above, by the solution of a number of cubic equations. I have only drawn the critical curves, because the addition of other members of the family would merely complicate the figure.

An important classification of orbits may be derived from this figure. When C is greater than 40.1821 the third body must be either a superior planet moving outside of the large oval, or an inferior planet moving inside of the larger internal oval, or a satellite moving inside the smaller internal oval; and it can never exchange one of these parts for either of the other two. The limiting case $C = 40.1821$ gives superior limits to the radii vectores of inferior planets and of satellites, which cannot sever their connections with their primaries.

When C is less than 40.1821 but greater than 38.8760 , the third body may be a superior planet, or an inferior planet or satellite, or a body which moves in an orbit which partakes of the two latter characteristics; but it can never pass from the first condition to any of the latter ones.

When C is less than 38.8760 and greater than 34.9054 , the body may move anywhere save inside of a region shaped like a horse-shoe. The distinction between the two sorts of planetary motion and the motion as a satellite ceases to exist, and if the body is started in any one of

these three ways it is possible for it to exchange the characteristics of its motion for either of the two other modes.

When C is less than 34.9054 and greater than 33 , the forbidden region consists of two strangely shaped portions of space on each side of SJ .

Lastly when C is equal to 33 , than which it cannot be less, the forbidden regions have shrunk to a pair of infinitely small closed curves enclosing the third angles of a pair of equilateral triangles erected on SJ as a base.

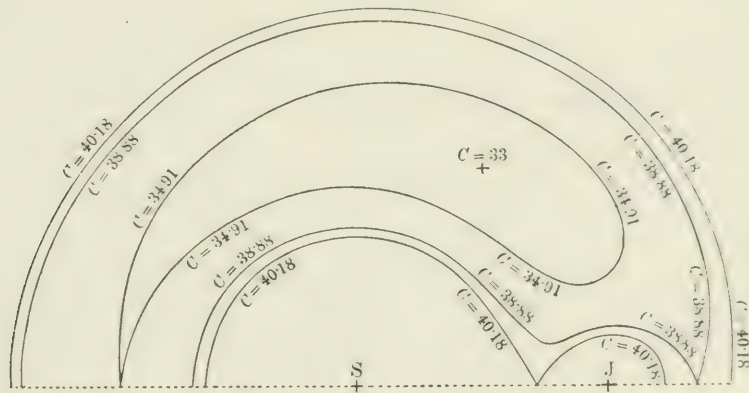


Fig.1

Curves of zero velocity, $10\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho}\right) = C$.

§ 4. A certain partition of space according to the nature of the curvature of the orbit.

It appears from (4) of § 2 that the curvature of an orbit is given by

$$\frac{V^2}{R} = P - 2nV, \quad \text{where} \quad P = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \sin \varphi.$$

Now if V_0 denotes any constant velocity, the equation $2\Omega = C + V_0^2$ defines a curve of constant velocity; it is one of the family of curves considered in § 3. We have seen that this family consists of a large oval enclosing two smaller ones, or of curves arising from the coalescence of ovals. In the mathematical sense of the term the »interior» of the curve of constant velocity consists of the space inside of either of the

smaller ovals or outside of the large one, or of the corresponding spaces when there is coalescence of ovals. It is a convenient and ordinary convention that when the circuit of a closed curve is described in a positive direction, the »interior» of the curve is on the left-hand side. According to this convention the meaning of the »inward» normal of one of these curves of constant velocity is clear, for it is directed towards the »interior». Similarly the inward normal of an orbit is towards the left-hand side, as the body moves along its path.

It is clear then that P is the component of effective force estimated along the inward normal of the orbit. Also if T be the resultant effective force $T^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2$; and if χ be the angle between T and the inward normal to the orbit, $P = T \cos \chi$.

Hence

$$\frac{V^2}{R} = T \cos \chi - 2nV.$$

If we consider curvature as a quantity which may range from infinite positive to infinite negative, it may be stated that of all the orbits passing through a given point the curvature is greatest for that orbit which is tangential to the curve of constant velocity, when the motion takes place in a positive direction along that curve.

If χ lies between $\pm \chi_0$, where $\cos \chi_0 = \frac{2nV}{T}$, the orbit has positive curvature; if $\chi = \pm \chi_0$, there is a point of contrary flexure in the orbit; and if χ lies outside of the limits $\pm \chi_0$, the curvature is negative.

If however T be less than $2nV$, there are no orbits, passing through the point under consideration, which have positive curvature. Hence the equation $T = 2nV$ defines a family of curves which separate the regions in which the curvature of orbits is necessarily negative, from those in which it may be positive.

Since

$$n^2 = \nu + 1, \quad V^2 = \nu \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right) - C, \quad T^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2,$$

the equation $T = 2nV$ becomes,

$$\begin{aligned} & \nu^2 \left(\frac{1}{r^2} - r \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho \right)^2 + 2\nu \left(\frac{1}{r^2} - r \right) \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho \right) \cos(\theta - \phi) \\ & = 4(\nu + 1) \left[\nu \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right) - C \right]. \end{aligned}$$

Since $2r\rho \cos(\theta - \phi) = r^2 + \rho^2 - 1$, it may be written

$$\begin{aligned} (16) \quad & \nu^2 \left(\frac{1}{r^4} - \frac{10}{r} - 3r^2 \right) + \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{10}{\rho} - 3\rho^2 \right) \\ & + \nu \left[\left(\frac{1}{r^3} - 1 \right) \left(\frac{1}{\rho^3} - 1 \right) (r^2 + \rho^2 - 1) - 4(r^2 + \rho^2) - 8 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} \right) \right] + 4C(\nu + 1) = 0. \end{aligned}$$

This equation is reducible to the sextic equation,

$$\begin{aligned} (16) \quad & \rho^6 [3(\nu + 1)r^4 + \nu r] \\ & + \rho^4 [3\nu(\nu + 1)r^6 - (4\nu C + 4C - \nu)r^4 + (10\nu^2 + 9\nu)r^3 - \nu r - \nu^2] \\ & + \rho^3 [(9\nu + 10)r^4 - \nu r] + \rho \nu r (1 - r^2)(1 - r^3) - r^4 = 0. \end{aligned}$$

It may also be written as a sextic in r , by interchanging r and ρ and by writing $\frac{1}{\nu}$ for ν and $\frac{C}{\nu}$ for C .

It would require a great deal of computation to trace the curves represented by (16), and for the present I have not thought it worth while to undertake the task.

When however we adopt Mr HILL's approximate value for the potential Q , the equation becomes so much simpler that it may be worth while to consider it further.

If m, a, n be the mass, distance from Sun and orbital angular velocity of Jove, the expression for Ω reduces to

$$\Omega = \frac{m}{\rho} + \frac{3}{2}n^2(x-a)^2 + \frac{3}{2}n^2a^2.$$

The last term is constant, so that if C be replaced by C_0 , where $C_0 = C - 3n^2a^2$, we may omit the last term in Ω and use C_0 in place of C .

Now taking units of length and time such that $m = 1, n = 1$; also writing $\xi = (x - a), \eta = y$; we have

$$(17) \quad \Omega = \frac{1}{\rho} + \frac{3}{2}\xi^2, \quad V^2 = 2\Omega - C_0, \quad \xi^2 + \eta^2 = \rho^2.$$

Then

$$T^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2 = 3\left(3 - \frac{2}{\rho^3}\right)\xi^2 + \frac{1}{\rho^4}.$$

Hence the equation (16) becomes

$$3\left(3 - \frac{2}{\rho^3}\right)\xi^2 + \frac{1}{\rho^4} = 4\left(\frac{2}{\rho} + 3\xi^2 - C_0\right),$$

or

$$(18) \quad \xi^2\left(1 + \frac{2}{\rho^3}\right) = \frac{4}{3}\left(C_0 - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{4\rho^4}\right).$$

Since $\xi = \rho \cos \psi$, the polar equation to the curve is

$$(18) \quad \cos^2 \psi = \frac{4}{3}C_0 \frac{\left(\rho - \frac{2}{C_0} + \frac{1}{4C_0\rho^3}\right)}{\rho^3 + 2}.$$

Mr HILL's curve $2\Omega = C_0$ gives

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^2 = \frac{1}{3}C_0\left(1 - \frac{2}{C_0\rho}\right), \\ \text{or} \\ \cos^2 \psi = \frac{1}{3}\frac{C_0}{\rho^3}\left(\rho - \frac{2}{C_0}\right). \end{array} \right.$$

It is clear that the two curves present similar characteristics, but the former is the more complicated one.

The asymptotes of (18) are $\xi = \pm 2\sqrt{\left(\frac{1}{3}C_0\right)}$, whilst those of (19) are $\xi = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{3}C_0\right)}$.

Again to find where the curves cut the positive half of the axis of η , we put $\xi = 0$, $\rho = \eta$ and find that (18) becomes

$$(20) \quad \eta^4 - \frac{2}{C_0}\eta^3 + \frac{1}{4C_0} = 0,$$

whilst (19) becomes simply $\eta = \frac{2}{C_0}$.

The condition that (20) shall have equal roots is $4\eta = \frac{6}{C_0}$, or $\frac{1}{\eta} = \frac{2}{3}C_0$. But $C_0 = \frac{2}{\eta} - \frac{1}{4\eta^4}$, and therefore $C_0 = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$.

The quartic for η has two real roots if C_0 is less than $\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$ or 1.8899, but no real roots if it is greater than this value.

It is easy to show that when the roots are real, one is greater than and the other less than $\frac{3}{2C_0}$.

It follows that if C_0 is greater than 1.8899 the curve does not cut the axis of η , but if less it does so twice.

To find the critical values of C_0 in the case of Mr HILL's curve (19), we put (as in § 3) $\eta = 0$ and therefore $\rho = \xi$, and we then find the condition that the equation shall have equal roots.

Now with $\rho = \xi$, (19) becomes

$$\xi^2 = \frac{1}{3}C_0 - \frac{2}{3\xi}.$$

This has equal roots when $\xi = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}$. Hence $C_0 = 3\xi^2 + \frac{2}{\xi} = 3^{\frac{4}{3}} = 4.3267$.

If C_0 be greater than 4.3267 the curve consists of an internal oval and of two asymptotic branches. With smaller values of C_0 the oval has coalesced with the two external branches.

Following the same procedure with our curve (18), we have to find when

$$\xi^2\left(1 + \frac{2}{\xi^3}\right) = \frac{4}{3}\left(C_0 - \frac{2}{\xi} + \frac{1}{4\xi^4}\right)$$

has equal roots.

The condition is that $3\xi^6 - 7\xi^3 + 2 = 0$, and the solutions are $\xi^3 = 2$,
 $\xi^3 = \frac{1}{3}$.

Now

$$C_0 = \frac{3}{4} \left(\xi^2 + \frac{2}{\xi} \right) + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{4\xi^4}.$$

Hence when

$$\xi^3 = 2, \quad C_0 = \frac{39}{8 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = 3 \cdot 8693;$$

and when

$$\xi^3 = \frac{1}{3}, \quad C_0 = 3^{\frac{4}{3}} = 4 \cdot 3267.$$

Thus there are three critical values of C_0 , viz: $C_0 = 1 \cdot 8899$, which separates the curves which do from those which do not intersect the axis of η ; $C_0 = 3 \cdot 8693$ when two branches coalesce; and $C_0 = 4 \cdot 3267$ when two branches again coalesce. The last is also a critical value of C_0 in the case of Mr HILL's curve.

It would seem then that if these curves were traced for the values $C_0 = 1 \cdot 5, 3, 4, 5$ a good idea might be obtained of their character, but I have not yet undertaken the task.

§ 5. *Formulae of interpolation and quadrature.*

The object of this paper is to search for periodic orbits, but no general method has been as yet discovered by which they may be traced. I have therefore been compelled to employ a laborious method of tracing orbits by quadratures, and of finding the periodic orbits by trial. The formulæ of integration used in this process will now be exhibited.

According to the usual notation of the calculus of finite differences, u_x is to denote a function of x , and the operators E and Δ are defined by

$$Eu_x = u_{x+1}, \quad \Delta u_x = u_{x+1} - u_x = (E - 1)u_x.$$

It is obvious that $E = e^{\frac{d}{dx}}$, where e is the base of Napierian logarithms, and that $E^x u_0 = u_x$.

In most of the work, as it presents itself in this investigation, the series of values $\dots u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ are known, but u_{n+1}, u_{n+2}, \dots are as yet unknown.

Now

$$E = 1 + \Delta = (1 - \Delta E^{-1})^{-1},$$

and

$$u_x = E^x u_0 = (1 - \Delta E^{-1})^{-x} u_0,$$

so that

$$(21) \quad u_x = \left(1 + x \Delta E^{-1} + \frac{x(x+1)}{[2]} \Delta^2 E^{-2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{[3]} \Delta^3 E^{-3} + \dots \right) u_0.$$

In the course of the work occasion will arise for finding $u_{-\frac{1}{2}}$ by interpolation; putting then $x = -\frac{1}{2}$ in (21), we have

$$(22) \quad u_{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2} \Delta E^{-1} - \frac{1}{8} \Delta^2 E^{-2} - \frac{1}{16} \Delta^3 E^{-3} - \frac{5}{128} \Delta^4 E^{-4} - \frac{7}{256} \Delta^5 E^{-5} \dots \right) u_0.$$

In a subsequent section the two following well-known formulæ of interpolation will be of service,

$$(23) \quad u_x = \left\{ 1 + x \cdot \frac{1}{2} (\Delta + \Delta E^{-1}) + \frac{x^2}{[2]} \Delta^2 E^{-1} + \frac{x(x^2-1)}{[3]} \cdot \frac{1}{2} (\Delta^3 E^{-1} + \Delta^3 E^{-2}) + \frac{x^2(x^2-1)}{[4]} \Delta^4 E^{-2} \dots \right\} u_0.$$

$$(23) \quad u_x = \left\{ 1 + x \Delta + \frac{x(x-1)}{[2]} \cdot \frac{1}{2} (\Delta^2 + \Delta^2 E^{-1}) + \frac{x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{[3]} \Delta^3 E^{-1} + \frac{x(x^2-1)(x-2)}{[4]} \cdot \frac{1}{2} (\Delta^4 E^{-1} + \Delta^4 E^{-2}) \dots \right\} u_0.$$

Of these formulæ the first is the better when the interpolated value of u_x lies between $x = -\frac{1}{4}$ and $x = +\frac{1}{4}$; and the second is the better when it lies between $x = +\frac{1}{4}$ and $x = +\frac{3}{4}$.

In order to obtain a formula of integration we require to prove that

$$-\frac{1}{\log(1-\alpha)} = \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r \alpha^{r-1} \int_0^1 \frac{v^{(r)}}{r!} dv,$$

where $v^{(r)}$ denotes the factorial $v(v-1)\dots(v-r+1)$.

This is easily proved as follows:—

$$\int_0^1 (1-\alpha)^r dv = \left[\frac{e^{r \log(1-\alpha)}}{\log(1-\alpha)} \right]_0^1 = \frac{-\alpha}{\log(1-\alpha)}.$$

But

$$\int_0^1 (1-\alpha)^r d\alpha = \sum_0^1 \int_0^1 (-)^r \alpha^{r-1} \frac{v^{(r)}}{r!} dv.$$

If the last two forms of this integral be equated to one another, we obtain the required formula.

Now

$$e^{\frac{d}{dx}} = (1 - \Delta E^{-1})^{-1},$$

and therefore

$$\frac{d}{dx} = -\log(1 - \Delta E^{-1}).$$

Hence

$$\int dx = \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} = -\frac{1}{\log(1 - \Delta E^{-1})} = \sum (-)^r \Delta^{r-1} E^{-r+1} \int_0^1 \frac{v^{(r)}}{r!} dv.$$

If the definite integrals on the right hand side be evaluated, we find

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_x dx &= \left(\Delta^{-1} E - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \Delta E^{-1} - \frac{1}{24} \Delta^2 E^{-2} - \frac{19}{720} \Delta^3 E^{-3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{160} \Delta^4 E^{-4} - \frac{863}{60480} \Delta^5 E^{-5} \dots \right) (u_n - u_0). \end{aligned}$$

Since Δ^{-1} contains an arbitrary constant we may choose

$$(24) \quad \Delta^{-1} u_1 = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{12} \Delta u_{-1} + \frac{1}{24} \Delta^2 u_{-2} + \frac{19}{720} \Delta^3 u_{-3} + \dots,$$

and we then have as our formula of integration,

$$(24) \quad \int_0^n u_x dx = \Delta^{-1} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{12} \Delta u_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^2 u_{n-2} \\ - \frac{19}{720} \Delta^3 u_{n-3} - \frac{3}{160} \Delta^4 u_{n-4} - \frac{863}{60480} \Delta^5 u_{n-5}.$$

This is the most convenient formula of integration when only the integral from n to 0 is wanted, and the integrals from $n-1$ to 0 , $n-2$ to 0 , etc. are not also wanted. But in the greater part of the work the intermediate integrals are also required. Now on applying the operator Δ to (24), we have

$$(25) \quad \int_n^{n+1} u_x dx = u_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta u_n - \frac{1}{12} \Delta^2 u_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 u_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 u_{n-3} \dots$$

If this be added to the integral from n to 0 we have the integral from $n+1$ to 0 .

I have found that a table of integration may be conveniently arranged as follows:—

Let us suppose that the integral from $n-1$ to 0 has been already found, and that the integral from n to 0 is required; write u_n and its differences Δu_{n-1} , $\Delta^2 u_{n-2}$, $\Delta^3 u_{n-3}$ in vertical column; below write $-\frac{1}{2} \Delta u_{n-1}$, $-\frac{1}{12} \Delta^2 u_{n-2}$, $-\frac{1}{24} \Delta^3 u_{n-3}$, and add them together; add u_n to the last; multiply the last sum by the common difference Δx , and the result is the integral from n to $n-1$; add to this the integral from $n-1$ to 0 , and the result is the required integral from n to zero.

Thus each integration requires 13 lines of a vertical column, and the successive columns follow one another, headed by the value of the independent variable to which it applies.

A similar schedule would apply when the formula (24) is used; but when the initial value of Δ^{-1} has been so chosen as to insure the vanishing of the integral from 0 to 0 , the final value of Δ^{-1} is to be found by adding to it the successive u 's, so that the intermediate columns need not be written down.

When the successive values of u depend on their precursors, it is necessary at the first stage to take Δx small, because in the first integration it is only possible to take the first difference into account. At the second stage the second difference may be included and at the third the third difference.

But in almost every case I begin integration with such a value of the independent variable (say $x=0$), that we either have u_x an even function of x , or an odd function of x ; in the first case $u_x = u_{-x}$, in the second $u_x = -u_{-x}$. Both these cases present special advantages for the commencement of integration, for in the first integration we may take second differences into account. Thus when u_x is an even function, the second difference involved in the table of integration from 1 to 0 is $2\Delta u_0$; and when u_x is an odd function it is zero. In both cases third differences may be included in the second integration.

It is of course desirable to use the largest value of the increment of the independent variable consistent with adequate accuracy. If at any stage of the work it appears by the smallness of the second and third differences involved in the integrals, that longer steps may safely be employed, it is easy to double the value of Δx , by forming a new difference table with omission of alternate entries amongst the values already computed. Thus if the change is to be made at the stage where $x=n$, the new difference table will be formed from u_{n-4}, u_{n-2}, u_n ; and thereafter Δx will have double its previous value.

When on the other hand it appears by the growth of the second and third differences that Δx is becoming too large, Δx can be halved, and the new difference table must be formed by interpolation. The formula (22) enables us to find $u_{n-\frac{1}{2}}$ from $u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots$ with sufficient accuracy for the purpose of obtaining the differences of $u_{n-\frac{3}{2}}, u_{n-1}, u_{n-\frac{1}{2}}, u_n$. The process of halving the value of Δx is therefore similar to that of doubling it.

In some of the curves which I have to trace there are sharp bends or quasi-cusps, and in these cases the process is very tedious. It is sometimes necessary to repeatedly halve the increments of the independent variable, which is the arc s of the curve. Thus if (s) denotes the function of the arc to be integrated, and if s be the value of the arc at

the point where the curvature begins to increase with great rapidity, and if δ be the previous increment of arc; then in integrating (s) from s to $s + \frac{1}{2}\delta$, the difference table is to be formed from $(s - \delta)$, $(s - \frac{1}{2}\delta)$, (s) , the middle one of these three being an interpolated value. At the next step (s) has to be integrated from $s + \frac{1}{2}\delta$ to $s + \frac{3}{4}\delta$, and the difference table is formed from (s) , $(s + \frac{1}{4}\delta)$, $(s + \frac{1}{2}\delta)$, the middle term being again an interpolation. This process may clearly be employed over and over again. In some of the curves traced the increment of arc has been 32 times less in one part than in another.

But the chief difficulty about these quasi-cusps arises when they are past, and when it is time to double the arc again. For the fact that the earlier values of the function to be used in the more open ranked difference tables are thrown back nearly to the cusp or even beyond it, makes the higher differences very large. Now the correctness of the formula of integration depends on the correctness of the hypothesis that an algebraic curve will give a good approximation to actuality. But in the neighbourhood of a quasi-cusp, and with increasing arcs this is far from correct. I have found then that in these cases of doubling the arc, a better result is obtained in the first and second integration by only including the second difference in the table of integration.

If we are tracing one member of a family of curves which are widely spaced throughout the greater part of their courses, but in one region are closely crowded into quasi-cusps, it is difficult to follow one member of the family through the crowded region, and on emerging from the region we shall probably find ourselves tracing a closely neighbouring member, and not the original one. I have applied the method to trace the curve drawn by a point attached to a circle at nine-tenths of its radius from the centre, as the circle rolls along a straight line. After the passage of the quasi-cusp I found that I was no longer exactly pursuing the correct line; nevertheless on a figure of the size of this page the difference between the two lines would be barely discernible. But the orbits which it is my object to trace do not quite resemble this case, since their cusps do not lie crowded together in one region

of space. I believe therefore that these cases have been treated with substantial accuracy.

Another procedure has however been occasionally employed which I shall explain in § 7.

§ 6. *On the method of tracing a curve from its curvature.*

It will be supposed that the curve to be traced is symmetrical with respect to the x axis, and starts at right angles to it so that $x = x_0$, $y = 0$, $\varphi = 0$, $s = 0$. This is not a necessary condition for the use of the method, but it appears from § 5 that the start is thus rendered somewhat easier than would be the case otherwise. The curvature at each point of the curve is supposed to be a known function of the coordinates x, y of the point, and of the direction of the normal defined by the angle φ .

The first step is to compute the initial curvature $\frac{1}{R_0}$; it is then necessary to choose such a value for the increment of arc ∂s as will give the requisite degree of accuracy.

I have found that it is well to take, as a rule, ∂s of such a size that $\frac{\partial s}{R_0}$ shall not be greater than about 8° ; but later, when all the differences in the tables of integration have come into use, I allow the increments of φ to increase to about 12° .

It is obvious that the curvature is even, when considered as a function of s . When nothing further is known of the nature of the curve, it is necessary to assume that the curvature is constant throughout the first arc ∂s , but it is often possible to make a conjecture that the curvature at the end of the arc ∂s will be say $\frac{1}{R_1}$. By the formula of integration with first and second differences we then compute $\varphi = \varphi_1$ at the end of the arc, by the first of equations (5) in § 2.

With this value of φ we find $\sin \varphi_1$, $\cos \varphi_1$, and observing that $\sin \varphi_0 = 0$, $\cos \varphi_0 = 1$, we compute x_1, y_1 by means of the second and third of (5), using first and second differences.

We next compute $\frac{1}{R_1}$ with these values of x, y , and if it agrees with the conjecture the work is done; and if not so, the work is repeated until there is agreement between the initial and final values of the curvature.

After the first arc, a second is computed, and higher differences are introduced into the tables of integration. We thus proceed by steps along the curve.

The approximation to the final result is usually so rapid, that in the recalculation it commonly suffices to note the changes in the last significant figure of the numbers involved in the original computation, without rewriting the whole.

The correction of the tables of integration is also very simple; for suppose that the first assumed value of the function to be integrated is u , and that the second approximation shows that it should have been $u + \partial u$; then all the differences in the column of the table have to be augmented by ∂u , and therefore the integral has to be augmented by

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \dots\right) \partial u \partial s.$$

If we stop with third differences, this gives the simple rule that the integral is to be augmented by $\frac{3}{8} \partial u \partial s$.

It has been shown in § 5 how the chosen arc ∂s is to be increased or diminished according to the requirements of the case.

This method is the numerical counterpart of the graphical process described by Lord KELVIN in his Popular Lectures,¹ but it is very much more accurate, and when the formula for the curvature is complex it is hardly if at all more laborious. In the present investigation it would have been far more troublesome to use the graphical method, with such care as to attain the requisite accuracy, than to follow the numerical method.

In order to trace orbits I first computed auxiliary tables of $r^2 + \frac{2}{r}$, and of $\log\left(\frac{1}{r^2} - r\right)$ for $r < 1$, and of $\log\left(r - \frac{1}{r^2}\right)$ for $r > 1$; the tables

¹ Popular Lectures, vol. 1, 2nd ed. pp. 31-42; Phil. Mag. vol. 34. 1892, pp. 443-448.

extend from $r=0$ to 1.5 at intervals of .001, but they will ultimately require further extension.

The following schedule shows the arrangement for the computation of the curvature at any point. The table has been arranged so as to be as compact as possible, and is not in strictly logical order; for the calculation of V^2 should follow that of r, ρ , but is entered at the foot of the first column. It will be observed that the calculation is in accordance with the formula (4) of § 2.

L denotes logarithm and C denotes cologarithm; ν the sun's mass is taken as 10, and $L 2n = .8217$, being $L 2\sqrt{11}$, a constant. The brackets indicate that the numbers so marked are to be added together.

Schedule for computation of curvature.

s	
φ x	$x-1$ y
L y C x	L y C $(x-1)$
L $\tan \theta$	L $\tan \phi$
θ	ϕ
$\varphi - \theta$	$\varphi - \phi$
L $\sec \theta$ L x	L $\sec \phi$ L $(x-1)$
L r	L ρ
r	ρ
L $\left(\frac{1}{r^2} - r\right)$	L $\left(\frac{1}{\rho^2} - \rho\right)$
L $\nu \cos(\varphi - \theta)$ C V^2	L $\cos(\varphi - \phi)$ C V^2
L a	L b
a	C V
b	L $2n$
$\nu \left(r^2 + \frac{2}{r}\right)$	L $\frac{2n}{V}$
$\rho^2 + \frac{2}{\rho}$	$-\frac{2n}{V}$
V ² + C	$a + b$
V^2	$\frac{1}{R}$

The formulæ $r = y \operatorname{cosec} \theta$, $\rho = y \operatorname{cosec} \phi$ are used, when the values of θ or ϕ show that these are the better forms.

The tables of integration are kept on separate sheets in the forms indicated in § 5.

As the computation proceeds I keep tables of differences of $x, y, \varphi, r, \rho, V^2$, and this check has been of immense advantage in detecting errors.

The auxiliary tables of logarithms are computed to 5 figures, but the last figure is not always correct to unity, and the fifth figure is principally of use in order to make correct interpolation possible.

The conversion of φ from circular measure to degrees and the values of $\sin \varphi$ and $\cos \varphi$ are obtained from Bottomley's four-figured table.

Most of the work has been done with these tables, but as it appears that the principal source of error lies in the determination of r and ρ , five-figured logarithms have generally been used in this part of the work, and the values of θ and ϕ are written down to 0'1.

In those parts of an orbit in which V^2 becomes small I have often ceased to use the auxiliary table for $\nu\left(r^2 + \frac{2}{r}\right)$; for since the auxiliary table of this function only contains four decimal places and since ν is 10, it follows that only three places are obtainable from the table, and of course there may be an error of unity or even of 2 in the last significant figure of V^2 .

In order to test the method, I computed an unperturbed elliptic orbit by means of the curvature. The formulæ were $V^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{10}$, $\frac{1}{R} = \frac{P}{V^2}$, where $P = \frac{1}{r^2} \cos(\varphi - \theta)$, and the initial values were $x_0 = 5$, $y_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $s_0 = 0$.

The curve described should be the ellipse of semiaxes 10 and $5\sqrt{3}$, and x, y ought to satisfy the equation

$$\left(\frac{x+5}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{5\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

I take the square root of the left hand side of this equation, with computed x, y , as one measure of the error of position in the ellipse.

Again if $\tan \chi = \frac{\frac{4}{3}y}{x+5}$, χ ought to be identical with φ ; hence $\chi - \varphi$ measures the error of the direction of motion.

Lastly the area conserved h is $5\sqrt{\frac{3}{10}}$ or 2.7386 ; but it is also $Vr \cos(\varphi - \theta)$, if the computation gives perfect results. Hence $h - Vr \cos(\varphi - \theta)$ measures the error in the equable description of areas. The semi-period should be $\pi\sqrt{1000}$ or 99.346 .

The computations were made partly with five-figured and partly with four-figured logarithms, and the process followed the lines of my other work very closely.

The following table exhibits the results together with the errors. It will be observed that when $s = 24$ there is a sudden increase in the second column of errors, but I have not been able to detect the arithmetical mistake which is probably responsible for it. The accordance still remains so close, that it appeared to be a waste of time to work any longer at this example.

Computed positions in an ellipse described under the action of a
central force.

s	x	y	φ	$\chi - \varphi$	$\left[\left(\frac{x+5}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{5\sqrt{3}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1$	$h - Vr \cos(\varphi - \theta)$
0	5.0000	.0000	0° 0'	0.0	+ .00000	.0000
1	4.9337	.9971	7° 37'	+ 0.3	+ .00002	.0000
2	4.7364	1.9768	15° 8'	+ 0.8	+ .00005	— .0001
3	4.4137	2.9227	22° 29'	+ 0.3	+ .00004	— .0001
4	3.9749	3.8205	29° 35'	— 0.3	+ .00004	— .0002
5	3.4304	4.6586	36° 23'	0.0	+ .00004	— .0001
6	2.7925	5.4281	42° 53'	+ 0.1	+ .00004	— .0001
8	1.2843	6.7363	55° 1'	+ 0.2	— .00002	+ .0001
10	— .4567	7.7147	66° 9'	+ 1.0	— .00001	+ .0002
12	— 2.3497	8.3507	76° 36'	+ 0.6	.00000	+ .0003
14	— 4.3259	8.6407	86° 39'	+ 0.1	— .00001	.0000
16	— 6.3225	8.5845	96° 35'	+ 0.4	+ .00003	.0000
18	— 8.2787	8.1823	106° 43'	+ 0.6	+ .00010	+ .0003
20	— 10.1305	7.4349	117° 21'	+ 0.8	+ .00012	+ .0003
22	— 11.8051	6.3481	128° 47'	+ 1.0	+ .00001	+ .0004
24	— 13.2181	4.9385	141° 17'	+ 0.8	+ .00028	+ .0004
25	— 13.7968	4.1237	148° 0'	— 0.4	+ .00027	+ .0003
26	— 14.2740	3.2456	155° 0'	— 0.8	+ .00027	+ .0001
27	— 14.6385	2.3151	162° 15'	— 0.5	+ .00023	+ .0003
28	— 14.8808	1.3456	169° 43'	— 0.5	+ .00021	+ .0003
29	— 14.9938	.3526	177° 19'	— 0.6	+ .00020	+ .0002
30	— 14.9740	— .6465	184° 57'	— 0.6	+ .00019	+ .0004
29.3546	— 15.0020	.0000	180° 1'	+ 1.0		

The last line in the above table was found by interpolation.

The computed values of the semiaxes of the ellipse (both involving interpolations) were found to be 10·0010 and ·86604; their correct values are 10·0000 and ·866026. The computed semiperiod (requiring another integration and interpolation) was found to be 99·346, agreeing with the correct value to the last place of decimals.

Considering that a considerable part of the computation was done with four-figured tables, the accuracy shown in this table is surprising.

This calculation is exactly comparable with the best of my calculations of orbits, but there has been from time to time a good deal of variety in my procedure. My object has been throughout to cover a wide field with adequate accuracy rather than a far smaller one with scrupulous exactness, for economy of labour is of the greatest importance in so heavy a piece of work. I shall in the appendix generally indicate which are the more exact and which the less exact computations. I do not think it would in any case have been possible in the figures to show the difference between an exactly computed and a roughly computed curve, because the lines would be almost or quite indistinguishable on the scale of the plates of figures. This however might not be quite true of the orbits which have very sharp bends in them.

§ 7. *Development in powers of the time; the form of cusps.*

In a few cases the quasi-cusps of orbits have been computed by means of series; the mode of development will therefore now be considered.

If for brevity we write

$$2n = m, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v.$$

the equations of motion (1) become

$$(26) \quad \frac{du}{dt} = mv + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -mu + \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Now let

$$D_i = \frac{d^i u}{dt^i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d^i v}{dt^i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{where } i \text{ is } 0, 1, 2, 3 \dots$$

Then total differentiation of a function of x, y, t or of x, y, u, v is expressed in terms of partial differentials as follows:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + D_0.$$

It is obvious that $\frac{\partial}{\partial t} D_i = D_{i+1}$, and $\frac{d}{dt}$ performed on a function of x, y , but not of u, v , is simply D_0 .

If we differentiate (26) repeatedly with respect to the time, we have

$$(27) \quad \frac{d^{i+1} u}{dt^{i+1}} = m \frac{d^i v}{dt^i} + \left(\frac{d}{dt}\right)^i \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{d^{i+1} v}{dt^{i+1}} = -m \frac{d^i u}{dt^i} + \left(\frac{d}{dt}\right)^i \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Now $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ and $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ are functions of x, y only, and not also of u, v ; therefore in the last terms of these equations,

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{when } i = 1, \quad \frac{d}{dt} = D_0, \\ \text{when } i = 2, \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^2 = D_1 + D_0^2, \\ \text{when } i = 3, \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^3 = D_2 + 3D_0 D_1 + D_0^3, \\ \text{when } i = 4, \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^4 = D_3 + 4D_0 D_2 + 3D_1^2 + 6D_0 D_1 + D_0^4, \end{array} \right. \quad \text{and so forth.}$$

The function Ω consists of two parts, one being a function of r , the other of ρ ; if in the latter part we write $\xi = (x - 1)$, $\eta = y$,

$$\Omega = \frac{1}{2} \nu (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\nu}{r} + \frac{1}{\rho}.$$

The partial differentials of Ω with respect to x, y may be regarded also as consisting of two parts viz. of the partial differentials with respect to

x, y of $\frac{1}{2}\nu(x^2 + y^2) + \frac{\nu}{r}$, and of the partial differentials with respect to ξ, η of $\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{\rho}$. These two parts may be considered separately, since, except as regard the factor ν , the one is the exact counterpart of the other.

The partial differentials of $\frac{1}{2}\nu(x^2 + y^2)$ disappear after the first two orders, and those of $\frac{\nu}{r}$ are exactly those functions which occur in the theory of spherical harmonic analysis.

Thus

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cos \theta, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \sin \theta;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r} = \frac{3}{r^3} \sin \theta \cos \theta,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3} (3 \sin^2 \theta - 1);$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{1}{r} = \frac{3}{r^5} (3 \cos \theta - 5 \cos^3 \theta), \quad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \frac{1}{r} = \frac{3}{r^5} (\sin \theta - 5 \sin \theta \cos^2 \theta),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \frac{1}{r} = \frac{3}{r^5} (\cos \theta - 5 \cos \theta \sin^2 \theta), \quad \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{1}{r} = \frac{3}{r^5} (3 \sin \theta - 5 \sin^3 \theta);$$

and so forth.

It thus appears that the calculation of the successive differentials of u, v with regard to the time is easy, although laborious. These differentials, when appropriately divided by the factorials of 1, 2, 3, 4 etc., are the successive coefficients of the powers of the time in the developments of x, y . If the series for x, y be differentiated, we obtain those for u, v .

The Jacobian integral is useful as a control to the applicability of the series; for the square of the velocity corresponding to any position computed from the series for x and y should agree with the value of $u^2 + v^2$ as computed from the series for u and v .

The computation of an orbit by series is however so tedious, that I have made very little use of this method.

I have also obtained a less extended development for x, y in terms of powers of the arc of the orbit, but the formulæ are so cumbrous as to be of little service.

The development in powers of the time becomes much less laborious if we start from a point in the curve of zero velocity, and in this case the symbols D_i may be replaced by their full expressions in terms of the partial differentials of Ω . But it does not seem worth while to give these special forms, except as regard the first two terms.

If we have initially $x = x_0, y = y_0, u = 0, v = 0, D_0$ and all its powers vanish, and

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, & \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2 u}{dt^2} &= m \frac{\partial \Omega}{\partial y}, & \frac{d^2 v}{dt^2} &= -m \frac{\partial \Omega}{\partial x}.\end{aligned}$$

Hence as far as the cube of the time,

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \frac{1}{2} t^2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{6} t^3 m \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ y - y_0 &= \frac{1}{2} t^2 \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{6} t^3 m \frac{\partial \Omega}{\partial x}.\end{aligned}$$

These may be written

$$\begin{aligned}(x - x_0) \frac{\partial \Omega}{\partial y} - (y - y_0) \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= \frac{1}{6} t^3 \cdot m T^2, \\ (x - x_0) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \frac{1}{2} t^2 \cdot T^2,\end{aligned}$$

where $T^2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2$.

By elimination of t , and substitution of $2n$ for m , we obtain the equation to the cusp,

$$8n^2 \left[(x - x_0) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right]^3 = 9T^2 \left[(x - x_0) \frac{\partial \Omega}{\partial y} - (y - y_0) \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right]^2.$$

The cusp is therefore a semicubical parabola, with the tangent at the cusp normal to the curve $2\Omega = C$.

§ 8. *Variation of orbit.*

The object of this paper is not only to discover periodic orbits but also to consider their stability.

Now the stability of a periodic orbit is determinable by discovering whether the motion is oscillatory or not, when the path varies by infinitely little from that of the periodic orbit. The variation of an orbit may be of two kinds, for the constant of relative energy may be varied, or the planet may be displaced from the periodic orbit.

Suppose that the constant C undergoes a small variation and becomes $C + \delta C$; then there must be a periodic orbit, corresponding to $C + \delta C$, which differs by very little from that corresponding to C .

Now if a planet be moving in a periodic orbit, and if C suddenly becomes $C + \delta C$, we may henceforth refer the motion to the varied periodic orbit, and may consider the constant of relative energy as $C + \delta C$ and invariable. The periodic orbit of reference then varies *per saltum*, but the instantaneous position of the planet is unvaried, and therefore the planet is now displaced from its orbit of reference. Hence the result of a variation of C will virtually be determined by regarding C as constant, and by supposing the planet to be displaced from the periodic orbit. This subject is considered in the present section.

The whole of the following investigation is founded on the work of Mr HILL,¹ but it is presented in a different form.

If the Jacobian integral (2) be differentiated with respect to the time, and if the equations $\frac{dx}{dt} = -V \sin \varphi$, $\frac{dy}{dt} = V \cos \varphi$ be used in the result, we obtain

$$(28) \quad \frac{dV}{dt} = -\sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Again if the first of the equations of motion (1) be multiplied by

¹ *On the part of the motion of the moon's perigee etc.* Acta Mathem. Vol. 8, pp. 1—36.

$-\cos \varphi$, and the second by $-\sin \varphi$, and if the two be added together, the result may be written

$$\cos \varphi \frac{d}{dt}(V \sin \varphi) - \sin \varphi \frac{d}{dt}(V \cos \varphi) + 2nV = -\cos \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \sin \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Completing the differentiations on the left-hand side, we have

$$(29) \quad V \left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n \right) = -\cos \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \sin \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Let s be the arc of the orbit, and p the arc of an orthogonal trajectory of the orbit, estimated in the direction of the outward normal of the orbit; then

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial p} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y}. \end{cases}$$

Accordingly (28), (29) and the Jacobian integral become

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial s}, \\ V \left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n \right) = -\frac{\partial \Omega}{\partial p}, \\ V^2 = 2\Omega - C. \end{cases}$$

The equations (30) are equivalent to (1) and (2).

Now suppose that x, y are the coordinates of a point on an orbit, and that $x + \partial x, y + \partial y$ are the coordinates of a point on an adjacent orbit. Then if we put

$$\begin{aligned} \partial p &= \partial x \cos \varphi + \partial y \sin \varphi, \\ \partial s &= -\partial x \sin \varphi + \partial y \cos \varphi, \end{aligned}$$

$\partial p, \partial s$ are the distances, measured along the outward normal and along the arc of the unvaried orbit, from the original point x, y to the adjacent point $x + \partial x, y + \partial y$.

If, with x, y as origin, rectangular axes be drawn along the outward normal and along the arc of the unvaried orbit, we may regard $\partial p, \partial s$

as the coordinates of the new point relatively to the old one. The new axes rotate with angular velocity $\frac{d\varphi}{dt} + n$, the first term representing the angular velocity of the normal and the second that of our original axes of x and y .

The well-known formulæ for the component accelerations of a point along two directions, which instantaneously coincide with a pair of rotating rectangular axes by reference to which the position of the point is determined, give the accelerations

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \partial p - \partial p \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 - 2 \frac{d\partial s}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) - \partial s \frac{d^2\varphi}{dt^2}, & \text{along the normal} \\ \frac{d^2}{dt^2} \partial s - \partial s \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 + 2 \frac{d\partial p}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) + \partial p \frac{d^2\varphi}{dt^2}, & \text{along the tangent.} \end{cases}$$

These are the accelerations of the new point relatively to the old, estimated along lines fixed in space which coincide instantaneously with the normal and tangent of the unvaried orbit.

The function Ω includes the potential of the rotation n of the original axes of x and y . Hence $\Omega - \frac{1}{2} n^2 r^2$ is the true potential of the forces under which the body moves in the unvaried orbit, and

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\Omega - \frac{1}{2} n^2 r^2 \right), \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\Omega - \frac{1}{2} n^2 r^2 \right)$$

are the components of force in the unvaried orbit along the normal and along the arc.

Therefore the excess of the forces in the varied orbit above those in the unvaried orbit are

$$\left(\partial p \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \partial s \frac{\partial^2}{\partial p \partial s} \right) \left(\Omega - \frac{1}{2} n^2 r^2 \right) \quad \text{and} \quad \left(\partial p \frac{\partial^2}{\partial p \partial s} + \partial s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \left(\Omega - \frac{1}{2} n^2 r^2 \right).$$

Now by considering the meaning (30) of the operations $\frac{\partial}{\partial p}$, $\frac{\partial}{\partial s}$, it is easy to prove that

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^2}{\partial p^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^2}{\partial s^2} = 1, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^2}{\partial p \partial s} = 0.$$

Hence the excess of the forces in the varied orbit above those in the unvaried orbit are

$$\partial p \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} + \partial s \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial s} - n^2 \partial p, \quad \text{and} \quad \partial p \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial s} + \partial s \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} - n^2 \partial s,$$

along the normal and along the arc of the unvaried orbit.

But these are necessarily equal to the accelerations (31) of which they are the cause. Then transferring $-n^2 \partial p$, $-n^2 \partial s$ to the left hand sides of the equations, we have

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \partial p + \partial p \left[n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 \right] - 2 \frac{d\partial s}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) - \partial s \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \\ &= \partial p \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} + \partial s \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial s}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \partial s + \partial s \left[n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 \right] + 2 \frac{d\partial p}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) + \partial p \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \\ &= \partial p \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial s} + \partial s \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2}. \end{aligned} \right.$$

These are the equations of motion in the varied orbit.

The variation of the last of (30), the Jacobian integral, gives

$$(33) \quad V \partial V = \partial p \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \partial s \frac{\partial \Omega}{\partial s}.$$

Now ∂V is the tangential velocity of the point $x + \partial x$, $y + \partial y$ in the varied orbit, relatively to the original point x, y . But as we only want to consider a velocity relatively to the axes of x and y , which themselves rotate with angular velocity n , our p, s axes must be regarded as rotating with angular velocity $\frac{d\varphi}{dt}$, instead of $\frac{d\varphi}{dt} + n$.

Accordingly

$$(34) \quad \partial V = \frac{d}{dt} \partial s + \partial p \frac{d\varphi}{dt}.$$

This may also be proved by putting $V \partial V = \frac{dx}{dt} \frac{d\partial x}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\partial y}{dt}$, and by substituting for the differentials in terms of $\partial p, \partial s, V, \varphi$.

The formula (34) enables us to get rid of ∂V in (33) but we may also get rid of $\frac{\partial \Omega}{\partial p}$ and $\frac{\partial \Omega}{\partial s}$ by means of the equations of motion (30). Thus the variation of the Jacobian integral leads to

$$V \left(\frac{d}{dt} \partial s + \partial p \frac{d\varphi}{dt} \right) = - V \left(\frac{d\varphi}{dt} + 2n \right) \partial p + \frac{dV}{dt} \partial s.$$

Therefore

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \partial s + 2 \partial p \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) - \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \partial s = 0, \\ \text{or} \\ V \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s}{V} \right) + 2 \partial p \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) = 0. \end{array} \right.$$

The equations (35) are two forms of the varied Jacobian integral.

A great simplification of the equations of motion (32) is possible by reference to the unvaried motion.

Let us suppose then that $\partial p, \partial s$ are no longer displacements to a varied orbit, but are the actual displacements occurring in time ∂t in the unvaried orbit. Thus $\partial p = 0$, $\partial s = V \partial t$.

The equations (32) then give

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 \frac{dV}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) - V \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = V \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial s}, \\ \frac{d^2 V}{dt^2} + V \left[n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 \right] = V \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2}. \end{array} \right.$$

The first of (36) may be written

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial s} = - \frac{2}{V} \frac{dV}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right).$$

These two terms, multiplied by ∂s , occur in the first of (32), which may therefore be written

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \partial p}{dt^2} + \partial p \left[n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 \right] - 2 \frac{d\partial s}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) \\ + \frac{2 \partial s}{V} \frac{dV}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) - \partial p \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} = 0. \end{aligned}$$

The terms in this which involve ∂s may now be eliminated by the first of (35), and we have

$$\frac{d^2 \partial p}{dt^2} + \partial p \left[n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 + 4 \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} \right] = 0.$$

If then we put

$$(37) \quad \theta = n^2 + 3 \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2},$$

we have

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \partial p}{dt^2} + \theta \partial p = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s}{V} \right) + 2 \frac{\partial p}{V} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) = 0. \end{cases}$$

The differential equation for ∂p is Mr HILL's well-known result.

We have now to consider the form of the function θ .

Let us write $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}$; then adding $V \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2}$ to each side of the second of (36), we have

$$\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dt^2} + n^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} = \nabla^2 \Omega,$$

so that

$$n^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{V dt} \right) + \left(\frac{dV}{V dt} \right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 + 2n^2 - \nabla^2 \Omega.$$

Substituting in (37),

$$\theta = 2n^2 - \nabla^2 \Omega + 2 \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{V dt} \right) + \left(\frac{dV}{V dt} \right)^2.$$

If we put $u = x + yi$, $s = x - yi$, $\frac{d}{dt} = \iota D$, where $\iota = \sqrt{-1}$, it is easy to show that $Du = Ve^{\varphi \iota}$, $Ds = -Ve^{-\varphi \iota}$, and

$$2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{D^2 u}{Du} - \frac{D^2 s}{Ds}, \quad 2 \frac{dV}{V dt} = \iota \left(\frac{D^2 u}{Du} + \frac{D^2 s}{Ds} \right).$$

Mr HILL's form for the function θ follows as once from these transformations.

Another form for θ , deducible directly from (37), is

$$\theta = n^2 - \frac{1}{2} \nabla^2 \Omega - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \sin 2\varphi + 3 \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2,$$

whence

$$\theta = \frac{\nu}{r^3} + \frac{1}{\rho^3} - \frac{3\nu}{r^3} \cos^2(\varphi - \theta) - \frac{3}{\rho^3} \cos^2(\varphi - \theta) + 3V^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{\nu}{V} \right)^2.$$

§ 9. *Change of independent variable from time to arc of orbit.*

For the purpose of future developments it is now necessary to change the independent variable from the time t to the arc s .

Let

$$(38) \quad \partial q = \partial p V^{\frac{1}{2}}.$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \partial p}{dt^2} &= V \frac{d}{ds} \left(V \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial q}{V^{\frac{1}{2}}} \right) \right) = V \frac{d}{ds} \left(V^{\frac{1}{2}} \frac{d \partial q}{ds} - \frac{1}{2V^{\frac{1}{2}}} \partial q \frac{dV}{ds} \right), \\ &= V^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 \partial q}{ds^2} - \frac{1}{2} \partial q V \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \frac{dV}{ds} \right). \end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned} V \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \frac{dV}{ds} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \frac{dV}{dt} \right) = -\frac{3}{2V^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 + \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2 V}{dt^2}, \\ &= -\frac{3}{2V^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{dV}{ds} \right)^2 + \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2 V}{dt^2}. \end{aligned}$$

Hence

$$\frac{d^2 \partial p}{dt^2} = V^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 \partial q}{ds^2} + \frac{3}{4V^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{dV}{ds} \right)^2 \partial q - \frac{\partial q}{2V^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2 V}{dt^2}.$$

Also

$$\theta \partial p = \frac{\theta \partial q}{V^{\frac{1}{2}}}.$$

If these two be added together, and divided by $V^{\frac{3}{2}}$, we obtain

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \partial q}{ds^2} + \psi \partial q = 0, \\ \text{where} \\ \psi = \frac{\theta}{V^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{dV}{V ds} \right)^2 - \frac{1}{2V^3} \frac{d^2 V}{dt^2}. \end{array} \right.$$

It remains to obtain the expression for the function ψ

Since

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \text{and} \quad n^2 = \nu + 1,$$

$$\theta = \nu + 1 + 3 \left(\frac{V}{R} + n \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2}.$$

Now from the first of (30) and the second of (36),

$$V \frac{dV}{ds} = \frac{\partial \Omega}{\partial s},$$

$$\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dt^2} = \left(\frac{V}{R} + n \right)^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} - \nu - 1.$$

Then by substitution in the second of (39),

$$\psi V^2 = \frac{3}{2}(\nu + 1) + \frac{5}{2} \left(\frac{V}{R} + n \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{dV}{ds} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2}.$$

Also

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} = \frac{1}{2} \nabla^2 \Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2}.$$

Now $2\Omega = \nu \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right)$, and

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \nu + 1 - \frac{\nu}{r^3} - \frac{1}{\rho^3} + \frac{3\nu}{r^3} \cos^2 \theta + \frac{3}{\rho^3} \cos^2 \phi,$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{3\nu}{r^3} \sin \theta \cos \theta + \frac{3}{\rho^3} \sin \phi \cos \phi,$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \nu + 1 - \frac{\nu}{r^3} - \frac{1}{\rho^3} + \frac{3\nu}{r^3} \sin^2 \theta + \frac{3}{\rho^3} \sin^2 \phi.$$

Hence

$$\nabla^2 \Omega = 2(\nu + 1) + \frac{\nu}{r^3} + \frac{1}{\rho^3},$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}, \\ &= \nu + 1 - \frac{\nu}{r^3} - \frac{1}{\rho^3} + \frac{3\nu}{r^3} \cos^2(\varphi - \theta) + \frac{3}{\rho^3} \cos^2(\varphi - \phi). \end{aligned}$$

Therefore

$$(40) \quad \Psi = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{n}{V} \right)^2 - \frac{3}{2V^2} \left[\frac{\nu}{r^3} \cos^2(\varphi - \theta) + \frac{1}{\rho^3} \cos^2(\varphi - \phi) \right] + \frac{3}{4} \left(\frac{dV}{V ds} \right)^2.$$

Also since

$$V \frac{dV}{ds} = \frac{\partial \Omega}{\partial s} = -\sin \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

$$(40) \quad \frac{dV}{V ds} = \frac{\nu}{V^2} \left(\frac{1}{r^2} - r \right) \sin(\varphi - \theta) + \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho \right) \sin(\varphi - \phi).$$

This completes the formula for Ψ in terms of the coordinates, the velocity, the curvature and of φ .

It may be useful to obtain the expressions for ∂s and $\partial \varphi$ in terms of the new independent variable s .

The second of (37) may be written down at once, namely

$$(41) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial s}{V} \right) = -\frac{2\partial q}{V^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{R} + \frac{n}{V} \right).$$

Also it is clear from geometrical considerations that

$$\partial \varphi = -\frac{d}{ds} \partial p + \frac{\partial s}{R},$$

whence

$$(42) \quad \partial \varphi = -\frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d\partial q}{ds} - \frac{1}{2} \partial q \left(\frac{dV}{V ds} \right) \right] + \frac{\partial s}{R}.$$

§ 10. *The solution of the differential equation for ∂q .*

The function Ψ has a definite value at each point of a periodic orbit whose complete arc is S . Therefore Ψ is a function of the arc s of the orbit, measured from any point therein, and when s has increased from zero to S , Ψ has returned to its initial value. Also since a periodic orbit is symmetrical with respect to the x -axis, Ψ is an even function of the arc s , when s is measured from an orthogonal intersection of the orbit with the x -axis. If the periodic orbit only goes once round S or J , or round both, all the intersections with the x -axis are necessarily orthogonal. I call such an orbit simply periodic, but the term must have its meaning extended so as to embrace the possibility of loops. But when there are loops all the intersections with the x -axis are not necessarily orthogonal, and if the orbit is only periodic after several revolutions some of the intersections cannot be orthogonal.

With the understanding that s is measured from an orthogonal intersection with the x -axis, Ψ is an even function of s and is expressible by the Fourier series

$$\Psi = \Psi_0 + 2\Psi_1 \cos \frac{2\pi s}{S} + 2\Psi_2 \cos \frac{4\pi s}{S} + \dots$$

Now multiply the differential equation (39) for ∂q by $\frac{S^2}{\pi^2}$, write σ for $\frac{\pi s}{S}$, and put $\Phi = \frac{S^2}{\pi^2} \Psi$, and we have

$$(43) \quad \frac{d^2}{d\sigma^2} \partial q + \Phi \partial q = 0.$$

Also if $\Phi_j = \frac{S^2}{\pi^2} \Psi_j$,

$$\Phi = \Phi_0 + 2\Phi_1 \cos 2\sigma + 2\Phi_2 \cos 4\sigma + \dots$$

If then we write $\zeta = e^{\sigma\sqrt{-1}}$,

$$\zeta \frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{d}{d\sigma},$$

and the equation (43) becomes

$$(44) \quad \left(\zeta \frac{d}{d\zeta} \right)^2 \partial q = \Phi \partial q,$$

where $\Phi = \sum_j \phi_j \zeta^{2j}$, the summation being taken from $j = +\infty$ to $j = -\infty$, and ϕ_{-j} being equal to ϕ_j .

Let us assume as the solution of (44)

$$\begin{aligned} \partial q &= \sum_j [(b_j + e_{-j}) \cos(c + 2j)\sigma + (b_j - e_{-j}) \sqrt{-1} \sin(c + 2j)\sigma], \\ &= \sum_j [b_j \zeta^{c+2j} + e_j \zeta^{-c+2j}]. \end{aligned}$$

The equation (44) must be separately satisfied for the terms involving b and for those involving e ; hence we need only regard one series of terms.

On substituting in (44) the assumed expression for ∂q , and equating to zero the coefficients of the several powers of ζ , we have

$$b_j(c + 2j)^2 = \sum_i b_{j-i} \phi_i,$$

written *in extenso* this is

$$\dots - b_{j-2} \phi_2 - b_{j-1} \phi_1 + b_j [(c + 2j)^2 - \phi_0] - b_{j+1} \phi_1 - b_{j+2} \phi_2 - \dots = 0.$$

There are an infinite number of equations like the above, but the infinity must be regarded as an odd number.

If from these equations the b 's be eliminated, we have an infinite determinantal equation for determining c . If we write

$$(c + 2j)^2 - \phi_0 = \{j\},$$

the equation is

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \{ -1 \} & -\phi_1 & -\phi_2 & \dots \\ \dots & -\phi_1 & \{ 0 \} & -\phi_1 & \dots \\ \dots & -\phi_2 & -\phi_1 & \{ 1 \} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

This is the same in form as M^r HILL's determinantal equation.

¹ The equation of condition for the e 's is easily shown to be

$$e_{-j}(c + 2j)^2 = \sum_i e_{i-j} \phi_{-i};$$

and since $\phi_i = \phi_{-i}$, this is exactly the same as that for the b 's save that e_{-j} corresponds with b_j .

As much has been written on the subject, it is unnecessary to reproduce the arguments by which it may be shown that if

$$[j] = \phi_0 - 4j^2,$$

and

$$(45) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots & & & & \\ \dots & 1 & , & \frac{\phi_1}{[1]} & , & \frac{\phi_2}{[1]} & \dots \\ \dots & \frac{\phi_1}{[0]} & , & 1 & , & \frac{\phi_1}{[0]} & \dots \\ \dots & \frac{\phi_2}{[1]} & , & \frac{\phi_1}{[1]} & , & 1 & \dots \\ \dots\dots\dots & & & & & & \end{vmatrix},$$

the solution of the determinantal equation is given by

$$(45) \quad \sin^2 \frac{1}{2} \pi c = \Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}.$$

§ 11. *On the stability or instability of an orbit.*

When c is real, δq is expressible by a series of sines and cosines of multiples of the arc. Since V is an even function of the arc, it is expressible by a series of cosines of the same form as that for ϕ ; hence δp , which is equal to $V^{\frac{1}{2}} \delta q$, is expressible in a series, similar in form to that for δq .

But δp denotes normal displacement from the periodic orbit, and therefore the motion in the varied orbit is oscillatory with reference to the periodic orbit. In other words the periodic orbit is stable.

If c_0 be any one value of c , all its infinite values are comprised in the formula $\pm c_0 \pm 2i$, where i is an integer. It is however convenient to choose one value of c as fundamental. When the choice has been made we may refer to the terms in the series for δq of which the argument is c_0 as the principal terms, although it does not appear to be necessary that these terms should have the largest coefficients. In

fact since two arbitrary constants are involved in the specification of a definite variation of orbit, it is probable that the terms, which are numerically the most important in one variation, will not be so in another.

If the body be considered as moving in an elliptic orbit, it will be at its pericentre or apocentre, when ∂p is a negative or positive maximum, respectively. The principal terms of ∂q , and therefore also of ∂p , have the argument $c\sigma$ or $\frac{c\pi s}{S}$; hence if we may assume that the principal term is also the most important, the body has passed through a complete anomalistic circuit when s has increased from zero to $2\frac{S}{c}$.

Since S is the synodic arc in the relative orbit, $\frac{1}{2}c$ is the ratio of the anomalistic to the synodic arc, both arcs being measured on the orbit as drawn with reference to the moving axes.

Now I propose to adopt as a convention that the fundamental value of c shall be that value which lies nearest to $\sqrt{\phi_0}$, where ϕ_0 denotes the mean value of ϕ . This convention certainly attributes to $\frac{1}{2}c$ a physical meaning, which is correct in all those cases which have any resemblance to the motion of an actual satellite in the solar system. I shall accordingly use the value of c which lies nearest to $\sqrt{\phi_0}$ as fundamental.

We have just arrived at a physical meaning for c by considering the principal term in the series; now in so doing we were in effect considering only the mean motion of the body with reference to the moving axes; therefore $\frac{1}{2}c$ is also the ratio of the synodic to the anomalistic period.¹

If T denotes the synodic period, the mean motion of the body referred to axes fixed in space is $\frac{2\pi}{T} + n$; and if $\frac{d\omega}{dt}$ denotes the mean angular velocity of the pericentre with reference to axes fixed in

¹ It may be observed that when V is constant (as is the case when we only consider mean motion) $V^2\psi = \theta$, and Mr HILL's equation for ∂p becomes identical with the present one for ∂q . It is well to remark that what I denote by c is $2c$ of Mr HILL's notation.

space, the mean motion of the body with reference to the pericentre is $\frac{2\pi}{T} + n - \frac{d\omega}{dt}$. Then, since angular velocities vary inversely as periods,

$$\frac{1}{2}c = \frac{\frac{2\pi}{T} + n - \frac{d\omega}{dt}}{\frac{2\pi}{T}}, \quad \text{where } n^2 = \nu + 1.$$

Therefore

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = n - \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{2}c - 1 \right), \\ \text{or} \\ T \left(n - \frac{d\omega}{dt} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{2}c - 1 \right). \end{array} \right.$$

Mr HILL's c is equal to one half of my c , and accordingly the first of (46) is identical with the formula from which Mr HILL derives «a part of the motion of the lunar perigee».¹

The angular velocity of regression of the pericentre being $n - \frac{d\omega}{dt}$, it follows from (46) that $2\pi \left(\frac{1}{2}c - 1 \right)$ is the amount of that regression with respect to the moving axes in the synodic period.

Whilst the pericentre regresses with reference to the moving axes, it advances with reference to fixed axes; the advance in the synodic period is $nT - 2\pi \left(\frac{1}{2}c - 1 \right)$, and in the sidereal period the advance is

$$2\pi \left[1 - \frac{\frac{1}{2}c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right].$$

In the numerical treatment of stable periodic orbits I tabulate the apparent regression $2\pi \left(\frac{1}{2}c - 1 \right)$, and the actual advance $nT - 2\pi \left(\frac{1}{2}c - 1 \right)$

in the synodic period; also $2\pi \left[1 - \frac{\frac{1}{2}c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right]$ the advance in the sidereal period.

¹ Acta Mathem. vol. 8.

Let us now consider the case where c is imaginary, so that the motion is no longer oscillatory with respect to the periodic orbit, and the periodic orbit is unstable.

The form of (45) shows that c becomes imaginary either when $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ is negative, or when it is greater than unity; this function will therefore be described below as the criterion of stability.

If ϕ_0 were negative it would indicate that the mean force of restitution towards the periodic orbit was negative. Hence it seems obvious that the body would then depart from the periodic orbit, which would therefore be unstable. If however Δ were negative as well as ϕ_0 , it would seem as if it were possible to have a real value for c ; but it is not easy to see how this condition could lead to a stable orbit.

I have not yet come on any case where ϕ_0 is negative and accordingly that condition is left out of consideration for the present. We are left then with the two conditions, Δ negative or $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ greater than unity; these lead to two kinds of instability.

In instability of the first kind Δ is negative; for reasons which will appear below, I shall call this »even instability».

In this case let us put

$$\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = -D^2,$$

so that (45) becomes $\sin \frac{1}{2} \pi c = \pm D \sqrt{-1}$.

The sine in this case is hyperbolic, and if we write $c = 2i + k \sqrt{-1}$, where i is an integer, the equation for k becomes $\sinh \frac{1}{2} \pi k = \pm D$.

Since the values of c occur in pairs, equal in magnitude and opposite in sign, it is only necessary to consider the upper sign and the result may be written

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{1}{2} \pi k} = \sqrt{(D^2 + 1)} + D, \\ \text{or} \\ k = \frac{2}{\pi} \log [\sqrt{(D^2 + 1)} + D]. \end{array} \right.$$

I shall return in § 12 to the form of solution adapted to the case of »even instability».

Turning to the instability of the second kind, which I shall call »uneven instability», we have

$$\sin^2 \frac{1}{2} \pi c = \Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = D^2,$$

where D^2 is greater than unity, so that c is imaginary.

The sine in this case also becomes a hyperbolic function, and if we write $c = 2i + 1 + k\sqrt{-1}$, where i is an integer, we have

$$\sin \frac{1}{2} \pi c = (-1)^i \cosh \frac{1}{2} \pi k,$$

a hyperbolic cosine.

Hence

$$\cosh \frac{1}{2} \pi k = \pm D.$$

Taking only the upper sign as before, this may be written

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{1}{2} \pi k} = \sqrt{(D^2 - 1)} + D, \\ \text{or} \\ k = \frac{2}{\pi} \log_e [\sqrt{(D^2 - 1)} + D]. \end{array} \right.$$

I shall return in § 12 to the form of solution adapted to the case of »uneven instability», but I wish now to consider the nature of the transitions from instability to stability.

Suppose that we are considering a family of periodic orbits, the members of which are determined by the continuous increase or decrease of the constant C of relative energy; and let us suppose that $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$, being at first negative, increases and reaches the value zero. At the moment of the transition of this function from negative to positive, there is transition from even instability to stability. If on the other hand this function were positive and less than unity, and were to increase up to and beyond unity there would be a transition from stability to uneven instability.

In all the cases of stability which I have investigated, except one,¹ the fundamental value of c lies between 2 and 3, and the apparent

¹ The orbit in question is $C = 40.0$, $x_0 = 1.0334$; see Appendix.

regression of pericentre in the synodic period, namely $2\pi\left(\frac{1}{2}c - 1\right)$, lies between 0 and 180° , these extreme values corresponding with transitional stages.

It will now conduce to brevity to regard c as lying between 2 and 3, instead of regarding it as a multiple-valued quantity.

If we refer back to the form of solution assumed for the equation (44), we see that when $c = 2$, the solution is

$$\begin{aligned}\partial q = & (b_{-1} + e_1) + (b_0 + e_0 + b_{-2} + e_2) \cos \frac{2\pi s}{S} \dots \\ & + (b_0 - e_0 - b_{-2} + e_2) \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi s}{S} \dots,\end{aligned}$$

and that when $c = 3$, it is

$$\begin{aligned}\partial q = & (b_1 + e_{-1} + b_{-2} + e_2) \cos \frac{\pi s}{S} + (b_0 + e_0 + b_{-3} + e_3) \cos \frac{3\pi s}{S} \dots \\ & + (b_1 - e_{-1} - b_{-2} + e_2) \sqrt{-1} \sin \frac{\pi s}{S} + (b_0 - e_0 - b_{-3} + e_3) \sqrt{-1} \sin \frac{3\pi s}{S} \dots\end{aligned}$$

In the first case it is clear that when $s = S$, ∂q has gone through a complete period and has returned to its initial value; but in the second case whilst ∂q is equal in value, it is opposite in sign to what it was at first.

Consider then the first case where $c = 2$, and suppose that the body is displaced from the periodic orbit along the normal, at a conjunction. Then the body starts moving at right angles to the line of syzygies, and when $s = S$ it has again returned to the same point, and is again moving at right angles to the line of syzygies.

Hence it follows that we have found a new periodic orbit differing by infinitely little from the original one. Thus the original orbit is a double solution of the problem, and the interpretation to be put on the result $c = 2$ is, that we have found a periodic orbit which is a member of two distinct families.

The $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ corresponding to our family of orbits has been supposed to be increasing from a negative to a positive value; at the instant of transition the same function for the other family must also be passing through the value zero.

If C be the value of the constant of relative energy for the critical orbit which gives $c = 2$, there must be *two* orbits, infinitely near to one another, for which the constant is $C - \delta C$.

If the orbits were classified according to values of the parameter $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$, instead of according to values of C , these two families would have to be regarded as a single family, and the critical stage would be that in which C reached a maximum or minimum value.

But when the classification is according to values of C , we say that there are two families which coalesce at the critical value of C ; it is also clear that, as the orbit we were following was unstable up to this critical value, the other must have been stable.

An interesting example of this will be found below, where the families of orbits B and C spring from a single orbit.

Now reverting again to the question of the transition from instability to stability, let us suppose that as the constant C varies, $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$, being at first greater than unity, diminishes, passes through the value unity and continues diminishing. Then the orbit was at first unstable with uneven instability and c of the form $3 + k\sqrt{-1}$; it becomes stable at the critical stage with c less than 3. But there is now no real double solution at the moment of transition and no coalescence of families.¹ It is probable that there is coalescence with another family of imaginary orbits at this crisis, but I do not discuss this, since I am not looking at the subject from the point of view of the theory of differential equations. Accordingly in our figures of orbits there will be nothing to mark the transition from uneven instability to stability, and it will only be by the consideration of the function $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ that we shall be aware of the change.

The conclusions arrived at in this section seem to accord with those of M. POINCARÉ in his *Mécanique Céleste*, who remarks that periodic orbits will disappear in pairs.

¹ When I explained the results at which I have arrived to M. POINCARÉ, he suggested that there may be coalescence between a doubly periodic orbit and a singly periodic one, when the two circuits of the former become identical with one another and with the latter.

It is clear from this discussion that uneven instability can never graduate directly into even instability, but the transition must take place through a range of stability.

But this last conclusion must not be held to be contradictory of a very remarkable method of transition, of which we shall find an example below.

Suppose we have two independent orbits in either of which the body may move, and that as the constant of energy varies these two orbits approach until they have a common tangent. Then when the constant of energy varies still further, we shall find only a single orbit replacing the two independent ones. Now we shall see reason to suppose that two independent orbits one of which is evenly unstable, and the other unevenly unstable may fuse together so as to form an evenly unstable orbit. In this case we have, in some sense, a direct transition from uneven instability to even instability, without the interposition of stability. An example of this will be noted in § 18, where we shall find the satellite *A* fusing its orbit with the oscillatory orbit *a* and forming a figure-of-8 orbit.

§ 12. *Modulus of instability, and form of solution.*

The cases of instability will now be considered.

When the instability is of the first or even kind, we have $c = 2i + k\sqrt{-1}$, and

$$(49) \quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\pi k} = \sqrt{(D^2 + 1)} + D, \\ e^{-\frac{1}{2}\pi k} = \sqrt{(D^2 + 1)} - D, \end{cases}$$

where $D^2 = -\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$.

The solution of (44) was

$$\partial q = \Sigma_j [(b_j + e_{-j}) \cos(c + 2j)\sigma + (b_j - e_{-j}) \sqrt{-1} \sin(c + 2j)\sigma].$$

Now if we take the integer *i* involved in the expression for *c* as zero,

$$\cos(c + 2j)\sigma = \cosh k\sigma \cos 2j\sigma - \sqrt{-1} \sinh k\sigma \sin 2j\sigma,$$

$$\sqrt{-1} \sin(c + 2j)\sigma = -\sinh k\sigma \cos 2j\sigma + \sqrt{-1} \cosh k\sigma \sin 2j\sigma.$$

Therefore when the sign of summation only runs from ∞ to 0, instead

of to $-\infty$, and when b_0 and e_0 are supposed to be the halves of their values when the summation ran from $+\infty$ to $-\infty$, the solution may be written

$$\partial q = \sum_0^\infty \{ \cosh k\sigma [(b_j + e_{-j} + b_{-j} + e_j) \cos 2j\sigma + (b_j - e_{-j} - b_{-j} + e_j) \sqrt{-1} \sin 2j\sigma] \\ + \sinh k\sigma [-\sqrt{-1} (b_j + e_{-j} - b_{-j} - e_j) \sin 2j\sigma - (b_j - e_{-j} + b_{-j} - e_j) \cos 2j\sigma] \}.$$

Putting

$$\begin{aligned} b_j + b_{-j} &= B_j, & e_{-j} + e_j &= E_j, \\ b_j - b_{-j} &= \beta_j \sqrt{-1}, & e_{-j} - e_j &= \varepsilon_j \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

and writing the hyperbolic functions as exponentials, we have

$$(50) \quad \partial q = \sum_0^\infty \{ e^{k\sigma} (E_j \cos 2j\sigma + \varepsilon_j \sin 2j\sigma) + e^{-k\sigma} (B_j \cos 2j\sigma - \beta_j \sin 2j\sigma) \}.$$

By means of (49) this may be written

$$(50) \quad \partial q = \sum_0^\infty \left\{ \left(\sqrt{(D^2 + 1)} + D \right)^{\frac{2\sigma}{\pi}} (E_j \cos 2j\sigma + \varepsilon_j \sin 2j\sigma) \right. \\ \left. + \left(\sqrt{(D^2 + 1)} - D \right)^{\frac{2\sigma}{\pi}} (B_j \cos 2j\sigma - \beta_j \sin 2j\sigma) \right\}.$$

In (50) it is not safe to assume that the most important term is that for which $j=0$; indeed this will usually not be the case. All that we know is that the series contains sines and cosines of even multiples of σ , that one set of terms increases without limit and that the other set diminishes.

In the numerical treatment of unstable periodic orbits it will be well to have a modulus of the degree of instability; and these considerations afford a convenient means of obtaining such a modulus.

This modulus may be taken to be the number of synodic revolutions in which the augmenting factor doubles its initial value; that is to say we are to put

$$e^{k\sigma} = [\sqrt{(D^2 + 1)} + D]^{\frac{2\sigma}{\pi}} = 2.$$

Therefore

$$(51) \quad \frac{s}{S} = \frac{\sigma}{\pi} = \frac{\log \sqrt{2}}{\log [\sqrt{(D^2 + 1)} + D]}.$$

This is the modulus of instability, when it is of the even kind.

A consideration of the form of the series for ∂q shows that it increases without limit, and that the planet or satellite crosses and recrosses the periodic orbit an even number of times in a single circuit; it is on this account that I have called this »even instability».

When the instability is of the second or uneven kind, we have $c = 2i + 1 + k\sqrt{-1}$, or if we take i as zero, $c = 1 + k\sqrt{-1}$; also

$$(52) \quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\pi k} = D + \sqrt{(D^2 - 1)}, \\ e^{-\frac{1}{2}\pi k} = D - \sqrt{(D^2 - 1)}, \end{cases}$$

where $D^2 = \Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\Phi_0}$.

Then

$$\begin{aligned} \cos(c + 2j)\sigma &= \cos(2j + 1)\sigma \cosh k\sigma - \sqrt{-1} \sin(2j + 1)\sigma \sinh k\sigma, \\ \sqrt{-1} \sin(c + 2j)\sigma &= -\cos(2j + 1)\sigma \sinh k\sigma + \sqrt{-1} \sin(2j + 1)\sigma \cosh k\sigma. \end{aligned}$$

And the solution, expressed with singly infinite summation and with the proper change in the meanings of b_0 and e_0 , is

$$\begin{aligned} \partial q = \sum_0^\infty \{ & \cosh k\sigma [(b_j + b_{-j-1} + e_{-j} + e_{j+1}) \cos(2j + 1)\sigma \\ & + (b_j - b_{-j-1} - e_{-j} + e_{j+1}) \sqrt{-1} \sin(2j + 1)\sigma] \\ & + \sinh k\sigma [-\sqrt{-1} (b_j - b_{-j-1} + e_{-j} - e_{j+1}) \sin(2j + 1)\sigma \\ & - (b_j + b_{-j-1} - e_{-j} - e_{j+1}) \cos(2j + 1)\sigma] \}. \end{aligned}$$

Putting

$$\begin{aligned} b_j + b_{-j-1} &= B_j, & e_{-j} + e_{j+1} &= E_j, \\ b_j - b_{-j-1} &= \beta_j \sqrt{-1}, & e_{-j} - e_{j+1} &= \varepsilon_j \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

and writing the hyperbolic functions as exponentials, we have

$$(52) \quad \partial q = \sum_0^\infty \{ e^{k\sigma} (E_j \cos(2j + 1)\sigma + \varepsilon_j \sin(2j + 1)\sigma) + e^{-k\sigma} (B_j \cos(2j + 1)\sigma - \beta_j \sin(2j + 1)\sigma) \}.$$

By means of (52) this may be written

$$(53) \quad \partial q = \sum_0^{\infty} \left\{ (D + \sqrt{D^2 - 1})^{\frac{2\sigma}{\pi}} (E_j \cos(2j + 1)\sigma + \varepsilon_j \sin(2j + 1)\sigma) \right. \\ \left. + (D - \sqrt{D^2 - 1})^{\frac{2\sigma}{\pi}} (B_j \cos(2j + 1)\sigma - \beta_j \sin(2j + 1)\sigma) \right\}.$$

In this case again the terms for which $j = 0$ are not usually the most important ones, but we see that the series contains sines and cosines of odd multiples of σ ; and that one set of terms increases without limit and that the other diminishes. As in the first sort of instability, a convenient modulus is the number of synodic revolutions in which the amplitude of the increasing oscillation doubles its initial value; that is to say we put

$$e^{k\sigma} = (D + \sqrt{D^2 - 1})^{\frac{2\sigma}{\pi}} = 2.$$

Therefore

$$(54) \quad \frac{s}{S} = \frac{\sigma}{\pi} = \frac{\log \sqrt{2}}{\log [D + \sqrt{D^2 - 1}]},$$

where

$$D^2 = \Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}.$$

This is the modulus of instability, when it is of the uneven kind. A consideration of the principal term has shown us that there is an oscillation, whose amplitude increases without limit. The planet or satellite crosses and recrosses the periodic orbit an odd number of times in a single circuit, making ever increasing excursions on each side; it is on this account that I have called this »uneven instability».

It is interesting to consider the form which the equations of condition assume in the two sorts of instability.

In the case of even instability we have $c = k\sqrt{-1}$, and the equations for the determination of the b 's are given by

$$(55) \quad b_j(c + 2j)^2 = \sum_i b_{j-i} \phi_i, \\ = b_0 \phi_j + \sum_1^{\infty} b_i \phi_{j-i} + \sum_1^{\infty} b_{-i} \phi_{j+i}.$$

We now have

$$2b_j = B_j + \beta_j \sqrt{-1}, \quad 2b_{-j} = B_j - \beta_j \sqrt{-1},$$

$$2b_j(c + 2j)^2 = (4j^2 - k^2)B_j - 4jk\beta_j + \sqrt{-1}[4jkB_j + (4j^2 - k^2)\beta_j].$$

Then noting that β_0 is necessarily zero, and equating to zero the real and imaginary parts of the equation of condition (55), we have

$$(56) \quad \begin{cases} (4j^2 - k^2)B_j - 4jk\beta_j = B_0 \phi_j + \sum_1^\infty B_i(\phi_{j-i} + \phi_{j+i}), \\ 4jkB_j + (4j^2 - k^2)\beta_j = \quad \quad + \sum_1^\infty B_i(\phi_{j-i} - \phi_{j+i}). \end{cases}$$

In the case of $j = 0$, the second equation is identically true, and the first becomes

$$(55) \quad -k^2 B_0 = B_0 \phi_0 + 2 \sum_1^\infty B_i \phi_i.$$

It is easy to show that if we take j as negative, we are led to the same equations; thus it is only necessary to consider the case of j positive.

These equations suffice to determine all the B 's and β 's in terms of one of them, say B_0 , which is an arbitrary constant of the solution.

We have already seen that the equations of condition for e_{-j} are exactly the same as those for b_j . Hence bearing in mind the definitions of E_j and ε_j , we see that the equations of condition for E_j, ε_j are the same as those for B_j, β_j . Then since $\varepsilon_0 = 0$, E_j, ε_j are the same multiples of E_0 as B_j, β_j are of B_0 . Thus E_0 is the second arbitrary constant of the solution.

Suppose that we put $B_0 = 1$, and solve the equations finding $B_j = A_j$, $\beta_j = \lambda_j$, then the general solution is

$$(57) \quad \phi q = \sum_0^\infty [E_0 e^{i\sigma} (A_j \cos 2j\sigma + \lambda_j \sin 2j\sigma) + B_0 e^{-i\sigma} (A_j \cos 2j\sigma - \lambda_j \sin 2j\sigma)].$$

Now turn to the case of uneven instability where $c = 1 + k\sqrt{-1}$; the equation of condition may be written

$$(58) \quad b_j(c + 2j)^2 = \sum_0^\infty b_i \phi_{j-i} + \sum_0^\infty b_{-i-1} \phi_{j+i+1},$$

where

$$\begin{aligned} 2b_j &= B_j + \beta_j \sqrt{-1}, & 2b_{-j-1} &= B_j - \beta_j \sqrt{-1}, \\ 2b_j(c + 2j)^2 &= [(2j + 1)^2 - k^2] B_j - 2(2j + 1)k\beta_j \\ &\quad + \sqrt{-1} \{ 2(2j + 1)k B_j + [(2j + 1)^2 - k^2] \beta_j \}. \end{aligned}$$

Then equating to zero the real and imaginary parts of the equation of condition (58),

$$(59) \quad \begin{cases} [(2j + 1)^2 - k^2] B_j - 2(2j + 1)k\beta_j = \sum_0^\infty B_i (\phi_{j-i} + \phi_{j+i+1}), \\ 2(2j + 1)k B_j + [(2j + 1)^2 - k^2] \beta_j = \sum_0^\infty \beta_i (\phi_{j-i} - \phi_{j+i+1}). \end{cases}$$

It is easy to show that it is only necessary to consider the positive values of j .

These equations suffice to determine all the B 's and β 's in terms of B_0 , which is one of the arbitrary constants of the solution.

From the definitions of E_j, ε_j it is easy to see that the equations of condition are the same as (59), and that E_j, ε_j are the same multiples of E_0 , (the second arbitrary constant) that B_j, β_j are of B_0 .

Suppose that (59) are solved with $B_0 = 1$, and that we find $B_j = A_j$, $\beta_j = \lambda_j$; then the general solution is

$$(60) \quad \begin{aligned} \partial q &= \sum_0^\infty [E_0 e^{k\sigma} (A_j \cos(2j + 1)\sigma + \lambda_j \sin(2j + 1)\sigma) \\ &\quad + B_0 e^{-k\sigma} (A_j \cos(2j + 1)\sigma - \lambda_j \sin(2j + 1)\sigma)]. \end{aligned}$$

It follows therefore that when k has been found from the infinite determinant the solutions for the varied orbit are expressible by means of two arbitrary constants in both kinds of instability. Such solutions would of course only express the true motion for a short time.

I have actually applied this method to one of the unstable periodic orbits which was computed, but as the work leads to no useful conclusion I shall not give the details of it.

§ 13. *Numerical determination of stability.*

When a periodic orbit has been found by quadratures, it is not obvious by mere inspection whether it is stable or not, and we must consider the numerical processes requisite to obtain an answer to the question.

The points which are determined by quadratures in a periodic orbit do not divide the arc S into a number of equal parts. The distance along the arc from the first orthogonal crossing of the x axis to the second orthogonal crossing is $\frac{1}{2}S$; this may be determined by interpolation, for we may find what value of s makes y vanish.

In general there are two orbits computed, which differ from exact periodicity in opposite directions by small amounts. The arc $\frac{1}{2}S$, measured from the first orthogonal crossing to the second, which is not exactly orthogonal, is determined in each of these cases. The subsequent proceedings are then carried out in duplicate, and the final step is an interpolation between the two results to obtain the result for the exactly periodic orbit. In many cases however the computed orbit differs from a truly periodic one by an amount which is so small, that it may be attributed to the errors inherent to the method of calculation. In such cases the duplicate computation is unnecessary, and since the operations on the approximately periodic orbits are exactly like those on the truly periodic ones, we may henceforth speak as if the true orbit had been found.

The next step is the computation of ϕ corresponding to each computed point of the orbit. In order to take advantage of the work already carried out in the quadratures, I arrange the computation of ϕ in the following form:

Computation of ϕ .

$\varphi - \theta$	$\varphi - \phi$
Lr	$L\rho$
Lr^3	$L\rho^3$
$\left\{ \begin{array}{l} L\left(\frac{1}{r^2} - r\right) \\ L\nu \sin(\varphi - \theta) \\ CV^2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} L\left(\frac{1}{\rho^2} - \rho\right) \\ L \sin(\varphi - \phi) \\ CV^2 \end{array} \right.$
La	Lb
$\left\{ \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \\ \frac{n}{V} \end{array} \right.$
$\frac{dV}{Vds}$	$\frac{c}{c^2}$
$\left(\frac{dV}{Vds}\right)^2$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{6} c^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{Vds}\right)^2 \end{array} \right.$
	A
$\left\{ \begin{array}{l} L\nu \cos^2(\varphi - \theta) \\ Cr^3 \\ CV^2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} L \cos^2(\varphi - \phi) \\ C\rho^3 \\ CV^2 \end{array} \right.$
Ld	Le
$\left\{ \begin{array}{l} d \\ e \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A \\ -B \end{array} \right.$
B	$A - B$
$\left\{ \begin{array}{l} L\psi \\ L\frac{S^2}{\pi^2} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(A - B) \\ \psi \end{array} \right.$
$L\phi$	ϕ

As before L, C stand for logarithm and cologarithm, and the brackets indicate additions.

It would be tedious to find the Fourier's series for ϕ from its computed values, and it is best to find interpolated values of ϕ at exact sub-

If we write $\theta = 2\sigma = \frac{2\pi s}{S}$, the function ϕ is equal to

$$\phi_0 + 2\phi_1 \cos \theta + 2\phi_2 \cos 2\theta + \dots + 2\phi_8 \cos 8\theta.$$

In order to test the accuracy of the work and the convergency of the series, it is well to compute the values of several of the a 's directly from the harmonic expansion. For this purpose we have

$$\begin{cases} a_0 \\ a_{12} \end{cases} = \phi_0 + 2(\phi_2 + \phi_4 + \phi_6 + \phi_8) \pm 2(\phi_1 + \phi_3 + \phi_5 + \phi_7),$$

$$\begin{cases} a_2 \\ a_{10} \end{cases} = \phi_0 + \phi_2 - \phi_4 - 2\phi_6 - \phi_8 \pm \sigma_4(\phi_1 - \phi_5 - \phi_7),$$

$$\begin{cases} a_3 \\ a_9 \end{cases} = \phi_0 - 2\phi_4 + 2\phi_8 \pm \sigma_3(\phi_1 - \phi_3 - \phi_5 + \phi_7),$$

$$\begin{cases} a_4 \\ a_8 \end{cases} = \phi_0 - \phi_2 - \phi_4 + 2\phi_6 - \phi_8 \pm (\phi_1 - 2\phi_3 + \phi_5 + \phi_7),$$

$$a_6 = \phi_0 + 2(\phi_4 + \phi_8) - 2(\phi_2 + \phi_6).$$

It may be remarked that if the harmonic expansion of ϕ is convergent, the determinant from which the stability is determinable is also convergent.

But if the representation of ϕ by the harmonic expansion up to the 8th harmonic is very imperfect, it is necessary to give up the attempt to determine the stability numerically. In such cases however it is nearly always possible to see that the orbit is unstable, although it may not sometimes be so easy to perceive whether the instability is even or uneven.

We next have to calculate the several members of the determinant Δ by the formula

$$\frac{\phi_i}{\phi_0 - 4j^2}.$$

This is the entry for the j^{th} row above or below the centre of the determinant, and it is the i^{th} member to the right and to the left of the leading diagonal, all the members on the diagonal being unity. The

values of ϕ_i computed by the preceding analysis suffice to enable us to write down 17 columns and rows of Δ . The method of computing Δ will be considered in the next section.

§ 14. *The calculation of a determinant of many columns and rows.*

The following transformation contains the principle by which the number of columns and rows of a determinant may be diminished by unity

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{a_1} & \dots \\ 0 & b_2 - b_1 \frac{a_2}{a_1} & b_3 - b_1 \frac{a_3}{a_1} & \dots \\ 0 & c_2 - c_1 \frac{a_2}{a_1} & c_3 - c_1 \frac{a_3}{a_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - b_1 \frac{a_2}{a_1} & b_3 - b_1 \frac{a_3}{a_1} & \dots \\ c_2 - c_1 \frac{a_2}{a_1} & c_3 - c_1 \frac{a_3}{a_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Now if we write $b'_2 = b_2 - b_1 \frac{a_2}{a_1}$, and so on, and then extract the factor b'_2 , another column and row may be removed, and the process may be repeated until the determinant is reduced to a single member, say z_n ; then

$$\Delta = a_1 b'_2 c'_3 \dots z_n.$$

If the determinant is convergent and if the rows and columns be removed in proper succession, the factors tend to unity.

By interchanges of columns and rows any member of a determinant may be brought to stand at a corner, but if the number of interchanges is odd the sign of the determinant is changed.

It is not therefore necessary to work from a corner, as in the above example, but any column and any row may be chosen for elimination.

The member which stands at the intersection of the chosen column and row may be called the centre of elimination. Then if the centre of elimination be at an odd or even number of moves from a corner, the sign of the whole is or is not changed.

In the determinants which arise in this investigation the centre of elimination is always taken on the diagonal, and thus no change of sign is introduced.

Let us suppose that the determinant to be evaluated is a symmetrical one, and that the columns and rows are numbered, as in the following example:

$$\begin{array}{rccccc}
 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
 -2 & \left| \begin{array}{ccccc} C & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \right| \\
 -1 & \left| \begin{array}{ccccc} b_1 & B & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right| \\
 0 & \left| \begin{array}{ccccc} a_2 & a_1 & A & a_1 & a_2 \end{array} \right| \\
 1 & \left| \begin{array}{ccccc} b_3 & b_2 & b_1 & B & b_1 \end{array} \right| \\
 2 & \left| \begin{array}{ccccc} c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & C \end{array} \right|
 \end{array}$$

Let $(-1, -1)$ be the first centre of elimination, and $(1, 1)$ the second; then if the double elimination be carried out and algebraic reductions effected, it will be found that the result is

$$\begin{array}{rccccc}
 & -2 & 0 & 2 & & \\
 & \left| \begin{array}{ccc} B' & b'_1 & b'_2 \\ a'_1 & A' & a'_1 \\ b'_2 & b'_1 & B' \end{array} \right| & -2 & 0 & 2
 \end{array}$$

$B^2 \left(1 - \frac{b_2^2}{B^2} \right)$

Where

$$B' = C - \frac{b_3 c_1 + b_1 c_3}{B + b_2} - \frac{(b_1 - b_3)(c_1 - c_3)}{B - \frac{b_2^2}{B}}, \quad b'_1 = c_2 - \frac{b_1(c_1 + c_3)}{B + b_2},$$

$$b'_2 = c_4 - \frac{b_1 c_1 + b_3 c_3}{B + b_2} + \frac{(b_1 - b_3)(c_1 - c_3)}{B - \frac{b_2^2}{B}}, \quad a'_1 = a_2 - \frac{a_1(b_1 + b_3)}{B + b_2},$$

$$A' = A - \frac{2a_1 b_1}{B + b_2}.$$

If the determinant is convergent, with an odd number of columns and rows, $(0, 0)$ is the heart of the determinant; if the elimination proceeds away from the heart, at any stage of the process the approximation consists of the product of all the factors extracted, multiplied by $(0, 0)$, the heart of the remaining determinant.

Thus in the above example after one double elimination the approximation is

$$B^2 \left(1 - \frac{b_2^2}{B^2} \right) \left(A - \frac{2a_1 b_1}{B + b_2} \right).$$

This is in fact the full expression for the determinant

$$\begin{vmatrix} B & b_1 & b_2 \\ a_1 & A & a_1 \\ b_2 & b_1 & B \end{vmatrix}$$

I have found it most convenient in practice first to extract a squared factor, such as B^2 (thus reducing $(-1, -1)$ and $(1, 1)$ to unity), and afterwards to extract a single factor, such as $1 - \frac{b_2^2}{B^2}$.

This process cannot of course be applied with advantage, when the work is algebraical, but some process of the kind seems to be practically necessary, when the approximate numerical value is to be found of a determinant of a large number of columns and rows.

It will be noticed that after each pair of eliminations the primitive symmetry is restored; but the work might equally well be arranged otherwise. For we might first eliminate from the centre $(0, 0)$, which would not affect the symmetry, and we might then take the pair $(-1, -1)$ and $(1, 1)$. This variation of procedure would afford a valuable check on the arithmetic.

Where the outer fringe of the determinant obviously has but little influence on the final result, and where we are in any case going to use all the members in the original determinant, I have found it best to begin from the outside. In such a case four or five columns and rows may, as it were, be shelled off the outside, with scarcely any alteration of the central entries.

The actual numerical work of evaluating a determinant may be arranged as follows:

The number of decimal places to be retained is first fixed on. A paper is then marked with a gridiron of columns and rows, numbered from zero at the centre upwards and downwards. Each square should be large enough to contain four or five rows of figures. The original determinant is then written in the squares, the numbers being put as near the top of each square as possible. I have found it convenient to omit decimal points, and to express the numbers in units of the last decimal place retained. In most of my work, where only a rough result was required, I have adopted three places of decimals; thus the unit in which the entries are expressed is $\cdot 001$, and the diagonal members are all written as 1000.

The pair of symmetrical diagonal members, which is to form the first pair of centres, is then chosen. As stated above, I have in my later work usually worked from the outside. In the first pair of eliminations these diagonals are already unity, but this is not so subsequently, and we first reduce them to unity by dividing the rows on which they stand by their values, and by extracting a squared factor.

It will be found convenient to run a red line through the column and row to be removed. If the red lines be regarded as coordinate axes, the row being x and the column y , any member of the determinant may be specified by its x and y . If the member of the determinant whose coordinates are x, y be a ; and if the member whose coordinates are $x, 0$ be b ; and if the member whose coordinates are $0, y$ be c ; then the number which has to be substituted for a is $a - bc$.

In other words each number on the horizontal red line has to be multiplied by each number on the vertical red line, and the products have to be subtracted from the numbers which stand at the remote corners of the rectangles.

In effecting this process I form a separate table of the subtrahends, and write down the differences immediately under the numbers which they displace.

After the first elimination, which has rendered the determinant unsymmetrical, a single factor corresponding to the other chosen diagonal

member is extracted, its row is correspondingly altered, red lines are drawn to mark the column and row to be removed, and the similar process is repeated. The symmetry of the determinant should now be restored, but any pair of numbers which should agree are arrived at by different numerical processes.

The restoration of symmetry affords a very valuable check on arithmetical processes which I have found it singularly difficult to work correctly.

As only a limited number of decimal places are employed there is often a discrepancy of unity in the last significant figure between two numbers which ought to agree. It is sometimes possible to determine by inspection which of the two numbers is arrived at by the less risky series of operations, and I then adopt that number to represent both entries. But where there is no obvious reason for choosing one result more than the other, I choose one or other at hasard, and restore the perfect symmetry.

The process of elimination is continued until the determinant is reduced to $(0, 0)$, but in the last two or three stages it is well to increase the number of decimals retained.

If at any stage the factor to be extracted becomes small, the whole row to which it belongs becomes large, and the symmetry may perhaps be seriously affected. In this case it is well not to choose this pair of centres of elimination, but to take another pair, leaving this pair to a later stage in the calculation.

If the determinant is negative, a negative factor will be extracted at some stage. In all the cases which have been worked out it is easy to see that no other negative factor will ever arise, and thus the determinant will remain clearly negative. Most of the determinants have been written with 17 columns and rows; then beginning with $(-8, -8)$ and $(8, 8)$ I find that it is often possible to erase 8 columns and 8 rows on a single sheet of paper, with scarcely any modification of the central part of the determinant. Thus the determinant which at first had 289 spaces (although many only contain zeros) is reduced to 81 spaces, with but little labour.

The multiplications have been done with Crelle's table, but a specially computed auxiliary table of products, from $\cdot 000 \times \cdot 000$ up to

$\cdot 040 \times \cdot 040$ to three places of decimals, has rendered the work much more rapid.

I believe that the values obtained by this process are correct to within about one per cent. For the same determinant when reduced with different order of elimination agrees with its previous determination within less than that amount of discrepancy.

PART II.

§ 15. *Periodic Orbits.*

An orbit in which the third body can continually revolve, so as always to present the same character relatively to the two other bodies, is said to be periodic. If the motion is referred to a plane which is carried round with Jove and revolves about the Sun as a centre, any re-entrant orbit of the third body is periodic. Periodic orbits may consist of any number of revolutions round either of the primaries, or round other points in space. Periodic orbits, which are only re-entrant after several circuits, are much more difficult to discover than those which only make a single one; as hardly anything is known up to the present time about this subject. I determined to confine my attention to simple periodic orbits, which are re-entrant after a single circuit. This definition of a simply periodic orbit must not preclude the consideration of orbits with loops, for the inclusion of such loops is necessary to the comprehension of the subject.

It appears from the differential equations of motion that periodic orbits must in general be symmetrical with respect to the line of syzygy; or if any periodic orbit consists of a closed circuit round a point which does not lie on this line, there must be a similar closed circuit round a symmetrical point on the other side of it.

Periodic orbits are critical cases which separate the orbits of one class from those of another, and the chief difficulty in tracing them

consists in the fact that it is necessary to trace the gradual change of an orbit, as its parameters change, and to discover its form at the instant of its transformation into an orbit of a different character.

The partition of space derived from the Jacobian integral (§ 3) shows that the constant of relative energy C is of primary importance in the classification of orbits. The work of this investigation being numerical, I was compelled to assume a definite ratio for the mass of the Sun in terms of that of Jove; this ratio is taken as 10. The mass of the actual Sun in terms of that of the actual planet Jupiter is about 1000, and accordingly all the phenomena of perturbation are greatly exaggerated in our figures as compared with the real solar system. This exaggeration appeared to me advantageous for the purpose of giving a clear view of the phenomena.

The mass of the Sun being 10, that of Jove being unity and the distance between them being unity, we found in (9) that when C is greater than 40.1821 the third body must be either a superior planet, or an inferior planet, or a satellite, but cannot change from one of these conditions to another.

These larger values of C then bring us to those cases which are treated in the Planetary and Lunar Theories; I therefore cease my consideration of the problem for all values of C which are greater than 40.5. On the other hand C can never be less than 33. Hence the whole field to be treated is covered by the values of C between 33 and 40.5, and the problem is to obtain a complete synopsis of simply periodic orbits and of their stabilities between these limits.

The field of investigation is however so large that in the present paper I am compelled to make further restrictions. In the first place, the case of superior planets has not been touched at all; although, at the point at which I have now arrived, they must soon be taken into account.

Secondly all the orbits considered are direct; the retrograde orbits would afford an interesting field of research.

Lastly the present paper only covers the field from C equal to 38 to 40.5; and even this has occupied me for three years.

The slowness with which results are attained by arithmetical processes has been very tantalising, but the interest of the work has been sustained

by the fact that the results have presented a succession of surprises. I have, over and over again, been deceived when I imagined I could foresee the shape which would be assumed by the next orbit to be treated, and thus the subject was continually presenting itself under a new light. Nevertheless a point has, I think, been now reached at which some forecasts are possible, and I shall venture to say something hereafter in § 19 on this head, with the full knowledge however that the conjectures may prove erroneous.

Being ignorant of the nature of the orbits of which I was in search, I determined to begin by a thorough examination of one case. It seemed likely that the most instructive results would be obtained from cases in which it should be possible for an inferior planet and satellite to interchange their parts. Now when C is greater than 38.8760 but less than 40.1821, the two interior ovals of the curve of zero velocity coalesce into the shape of an hour-glass, and thus interchange of parts is possible. I therefore began by the consideration of the case where C is 39, and traced a large number of orbits which start at right angles to SJ , and in some cases I also traced the orbit with reference to axes fixed in space.

The two curves, which represent the orbit in space and with reference to the moving plane, contain a complete solution of the problem.

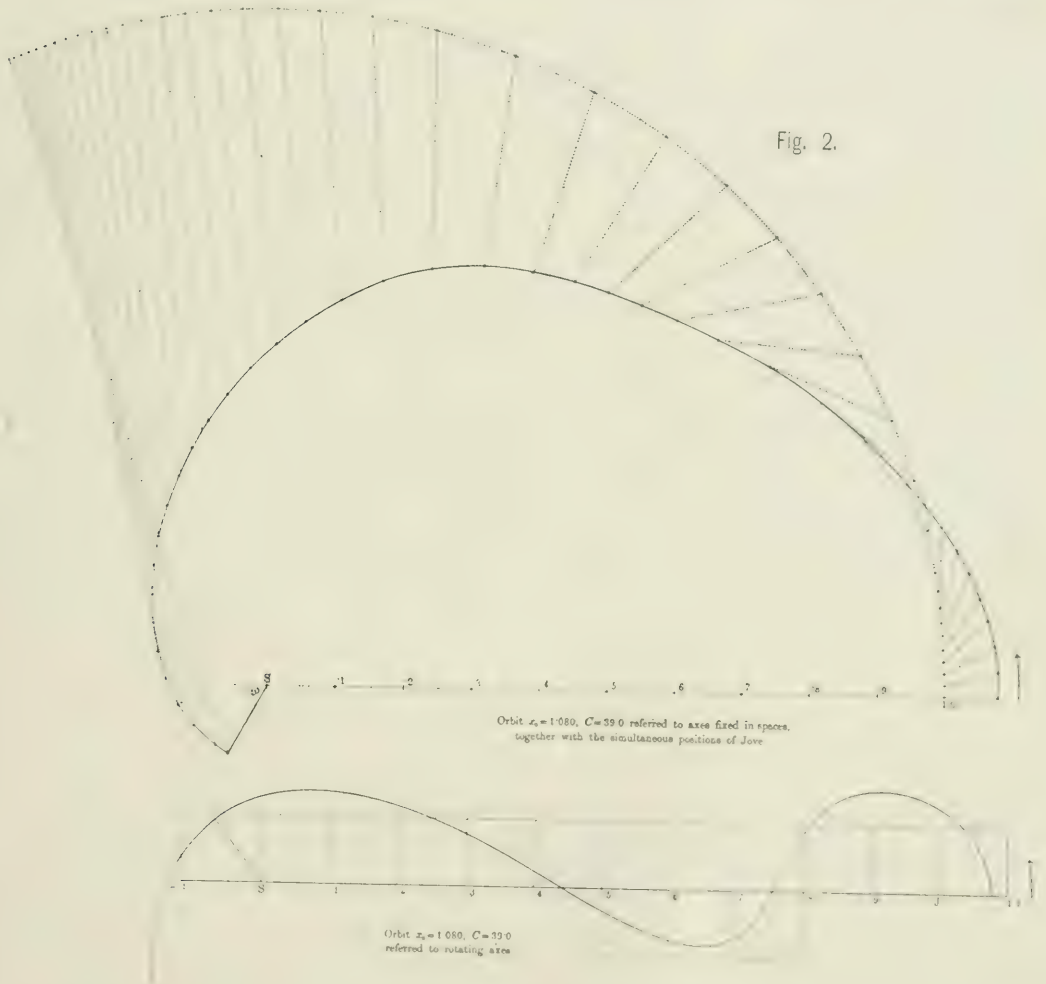
For if the curve on the moving plane be drawn as a transparency, and if the Sun in the two figures be made to coincide, and if the transparent figure be made to revolve uniformly about the sun, the intersection of the two curves will give the position of the body both in time and place.

In order to exhibit this I show in fig. 2 a certain orbit with reference to axes fixed in space and also the same orbit referred to rotating axes. In the former figure the simultaneous positions of the planet and of Jove are joined by dotted lines. It is interesting to observe how the body hangs in the balance between the two centres, before the elliptic form of the orbit asserts itself, as the body approaches the Sun.

This figure, and others of the same sort, are instructive as illustrating the usual sequence of events in orbits of this class.

If a planet be started to move about the Sun in an orbit of a certain degree of eccentricity, it will at first move with more or less exactness in an ellipse with advancing perihelion. But as the aphelion

approaches conjunction with Jove the perturbations will augment at each passage of the aphelion. At length the perturbation becomes so extreme that the elliptic form of the orbit is entirely lost for a time, and the body will either revert to the Sun, or it will be drawn off and begin



a circuit round Jove. In either case after the approximate concurrence of aphelion with conjunction, the orbit will have lost all resemblance to its previous form.

The figure 2 exhibits the special case in which the body only makes a single circuit round Jove, and where the heliocentric elliptic orbit

before and after the crisis has the same form; the perihelion has however advanced through twice the angle marked ω on the figure. In general the body would, after parting from the Sun, move several times round Jove until a concurrence of apojove with conjunction produced a severance

of the connection, but in the figure this concurrence happens after the first circuit. If the neck of the hour-glass defining the curve of zero velocity be narrow, the body may move hundreds of times round one of the centres before its removal to the other.

It seems likely that a body of this kind would in course of time

find itself in every part of the space within which its motion is confined. Sooner or later it must pass indefinitely near either to the Sun or to Jove, and as in an actual planetary system those bodies must have finite dimensions, the wanderer would at last collide with one of them and be absorbed. We thus gain some idea of the process by which stray bodies are gradually swept up by the Sun and planets.

It might be supposed that all possible orbits for any value of C will pass through a similar series of changes and that the bodies which move in them will be thus finally absorbed. Lord KELVIN is of opinion that this must be the case, and that all orbits are essentially unstable.¹ This may be so when sufficient time is allowed to elapse, but we shall see later that, even when the hour-glass has an open neck, there are still stable orbits, as far as our approximation goes. The only approximation permitted in this investigation is the neglect of the perturbation of Jove by the planet. For a very small planet the instability must accordingly be a very slow process, and I cannot but believe that the whole history of a planetary system may be comprised in the interval required for the instability to render itself manifest. Henceforward then I shall speak as though the stability of stable orbits were absolute, instead of being, as it probably is, only approximate.

§ 16. *Non-periodic orbits; $C = 39.0$.*

(α) *Orbits round Jove.* Fig. 3.

The Sun S is outside of the figure towards the left. A small portion of the curve $2Q = 39$ is shown to the right of J , and another portion at the narrowing of the neck of the hour-glass. The two points of zero force given by $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ (see § 3) are also marked.

The complete circuits are shown in order to obtain a better idea of the nature of the orbits, although this is unnecessary for the search for periodic orbits.

¹ Sir WILLIAM THOMSON, *On the Instability of Periodic Motion*, Philosophical Magazine, vol. 32, 1891, p. 555. M. POINCARÉ also considers that orbits may have a temporary, but not a secular stability. Acta Mathem. T. 13, 1890, p. 101.

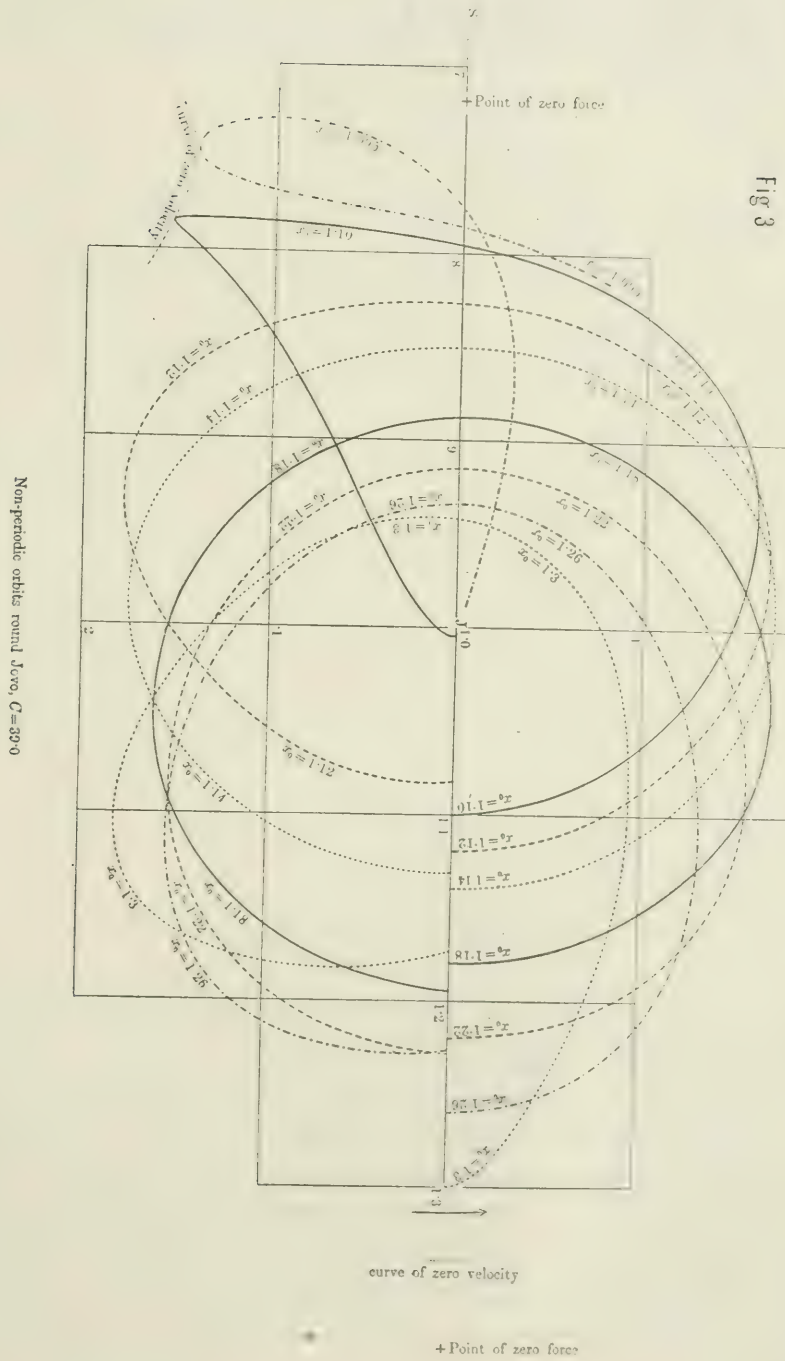
The satellite is supposed to be started at right angles to SJ at the conjunction remote from the sun, and enough of the orbits are shown to obtain a synopsis of the class. Here and elsewhere I define the orbits by the initial value of x , which is denoted by x_0 ; in this case the final value of x after the complete circuit may be called x_1 .

The first on the right (dotted-line) starts with $x_0 = 1.3$, and x_1 is much less than x_0 . The second (chain-dotted) has $x_0 = 1.26$, and x_1 has considerably increased so as to approach x_0 . The third (broken-line) has $x_0 = 1.22$, and x_1 has now become greater than x_0 ; therefore we have passed an orbit for which x_1 was equal to x_0 , and such an orbit is periodic.

In the fourth (full-line) with $x_0 = 1.18$, x_1 exceeds x_0 by more than it did in the third orbit. But in the fifth (dotted) with $x_0 = 1.14$, x_1 has again become less than x_0 ; therefore we have passed another periodic orbit.

In the sixth orbit, (broken-line) $x_0 = 1.12$, x_1 has decreased very much, and in the seventh (full-line) $x_0 = 1.10$, x_1 has become quite small. This last has very nearly a cusp. It is not so accurately computed as the preceding ones, having been the first difficult orbit undertaken, and my methods at that time were not quite so satisfactory as they became subsequently. In this seventh orbit at the final intersection φ has just passed through the value zero, and I think it is probable that there is an orbit of very nearly this form, with the final φ exactly zero. Such an orbit would be periodic, but as it would not be simply periodic, it falls outside the scope of this paper.

The first part of the eighth orbit (chain-dot) was derived by interpolation between $x_0 = 1.1$ and $x_0 = 1.09$ (shown in a future figure); the beginning of this orbit, which I call $x_0 = 1.095$, is not shown. It is a very remarkable curve, for after the loop, the body recrosses SJ , and going directly towards J , passes so close to it that it is impossible without more accurate computation to say what would happen subsequently. This orbit was so unexpected that I have thought it well to show in Fig. 4 its form with respect to axes fixed in space; in this figure (which does not claim close accuracy) the interpolated portion has been inserted. I do not think that any one could have conjectured how the body should have been projected so as to fall into Jove.



For smaller values of x_0 the bodies are no longer simple satellites, as they part company with Jove and pass away towards the Sun.

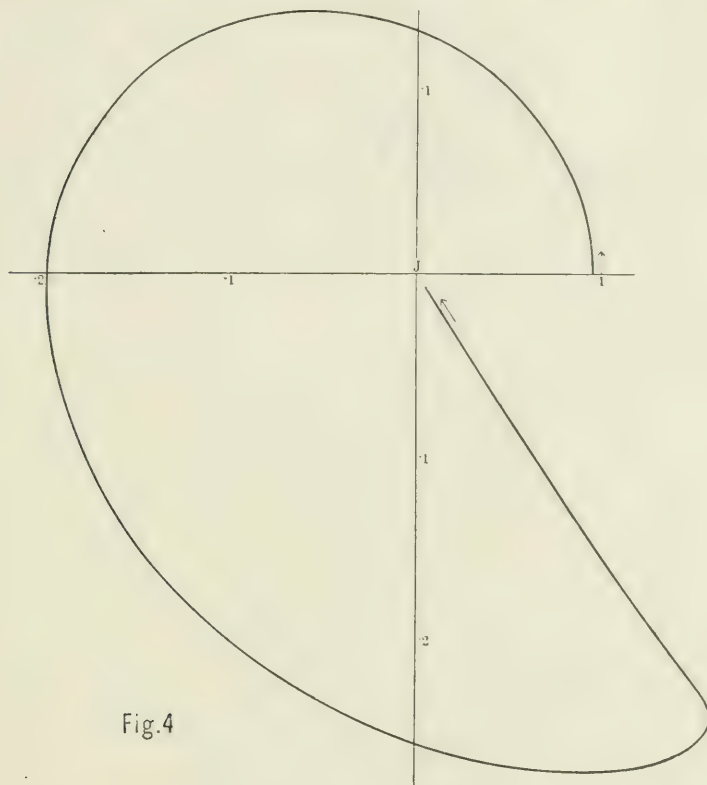


Fig.4

Orbit round Jove referred to axes fixed in space ($x_0 = 1.095$, $C = 39.0$)

(β) *Orbits passing from Jove to Sun.* Fig. 5.

The curve of zero velocity for $C = 39$ having been computed, it is shown in this figure, although it is not necessary.

The starting points are again from conjunction remote from the Sun. The first orbit (broken-line) is the one with which we ended in Figure 3, viz. $x_0 = 1.095$; the interpolated portion is however now drawn, as well as the computed portion. The body in this case does not pass away to the Sun.

We next come to an orbit (dotted) of which the first part was found by interpolation and which I call $x_0 = 1.09375$; the earlier portion of the curve is not drawn.

Where the orbit $x_0 = 1.095$ crosses SJ for the third time, φ is clearly negative, but where the orbit $x_0 = 1.09375$ crosses for the third time φ

is positive. There must therefore be an intermediate case for which φ vanishes, and this will give us a third periodic orbit round J . The orbit $x_0 = 1.09375$ passes away to the sun; and we then come to four more orbits $x_0 = 1.09, 1.08, 1.06, 1.04$ which follow a similar course, but with diminishing depression towards the negative side of SJ . The next orbit is $x_0 = 1.02$, in which the depression has disappeared. This curve has a slight hump in the place of the depression; it is the sort of feature which would present itself in a computed curve, when there has been an arithmetical error in the calculation, but we shall soon see that this hump is not explicable in this way.

The next curve which is traced (although others have been computed)

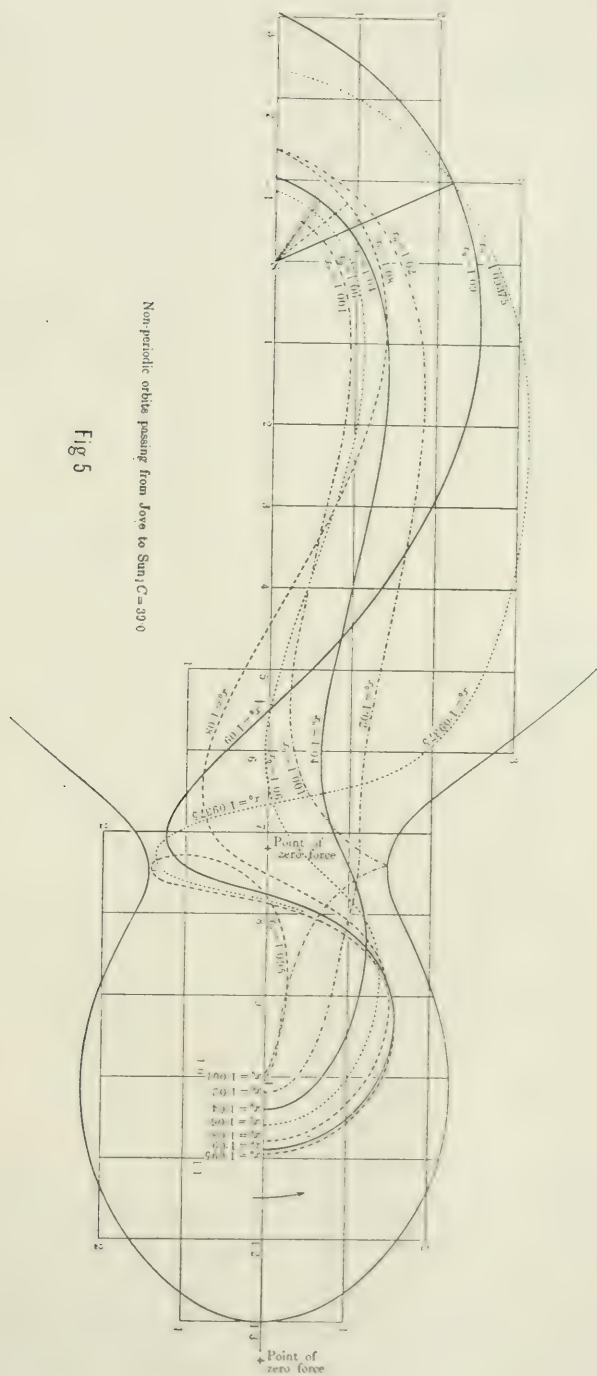


Fig 5

starts with $x_0 = 1.001$ (chain-dot); in a figure of this scale, it apparently starts actually from J . It will be observed that we now have a remarkable cusp, and it becomes obvious that the hump referred to above was an incipient elevation towards the cusp.

Passing now to the other end of the figure where the body passes round the Sun, we see from the incidence of the perihelia (which are indicated by radii from the Sun) that there can be no periodic orbit which is partly the path of a satellite and partly that of a planet; for such an orbit must have the longitude of the perihelion 180° .

The positions of the perihelia and the perihelion-distances seem to be almost chaotic in the figure, but I believe that the calculations are substantially correct, and a consideration of the numbers representing the positions of the perihelia shows that the chaos is rather apparent than real.

The following table gives the results:

Name of orbit.	Longitude of Perihelion.	Perihelion Distance.
$x_0 = 1.001$	$\pi - 32^\circ 45'$.058
$= 1.02$	$\pi - 34^\circ$.125
$= 1.04$	$\pi - 35^\circ 45'$.093
$= 1.06$	$\pi - 39^\circ 15'$.078
$= 1.08$	$\pi - 52^\circ 15'$.115
$= 1.09$	$\pi - 64^\circ 15'$.240
$= 1.09375$	$\pi - 30^\circ 45'$.222

Now if we were to plot out the defect of the longitudes from 180° , taking x_0 as abscissa and the defects of longitude as ordinates, we should obtain a sweeping curve starting from a minimum of 33° , rising to a maximum of 64° , and falling abruptly to 31° . If the perihelion-distances be treated similarly, we find a somewhat less satisfactory curve, for there is a small maximum, then a minimum and then a large maxi-

mum, followed by a fall in value. As I have said above, I believe that these results are substantially correct; but as each one of these curves represents three or four weeks hard work, I have not thought it good economy of labour to pursue the inquiry further in this respect.

(7) *orbits round the Sun*; $C = 39.0$. Fig. 6 (see p. 181).

These curves are drawn with less accuracy than the others, being computed with three-figured logarithms. I thought that sufficient accuracy would be attainable with this degree of approximation, but when I found that the saving of labour was not considerable, whilst the loss of accuracy was very great, I returned to the use of four-figured tables. It did not however seem necessary to recompute these curves.

The complete circuit is drawn for four of the curves, but the rest are only carried half way round.

The orbits start to the left of the Sun at the conjunction remote from Jove. The first orbit is $x_0 = -.6$ (full-line), and at the second crossing of the line of conjunction the angle φ is negative. The second orbit $x_0 = -.4$ (dotted) has φ positive, but small, at the second crossing; hence there is a periodic orbit for a value of x_0 a little less than $-.4$.

All the succeeding orbits viz. $x_0 = -.337, -.3, -.2, -.1, -.04, -.001$ have φ positive and successively increasing at the second crossing; and thus there is no other periodic orbit. The last two of these orbits have loops.

The orbit $x_0 = -.337$ was found in part by interpolation. It has been inserted because the third crossing of the line SJ appears to be orthogonal, and therefore the orbit is periodic, but not *simply* periodic. No search was being made for this sort of orbit, and the discovery was accidental.

§ 17. *Periodic Orbits classified according to values of C.*

Plates I, II, III.

Plate I, fig. 1. $C = 40.0$.

When C is greater than 40.18 , the inner branches of the curve of zero velocity, $2Q = C$, consist of two ovals, as seen in fig. 1; the periodic

orbits then consist of two approximately circular orbits round S and J respectively. These cases may be treated by the methods of the Planetary and Lunar Theories, and fall outside the scope of this paper.

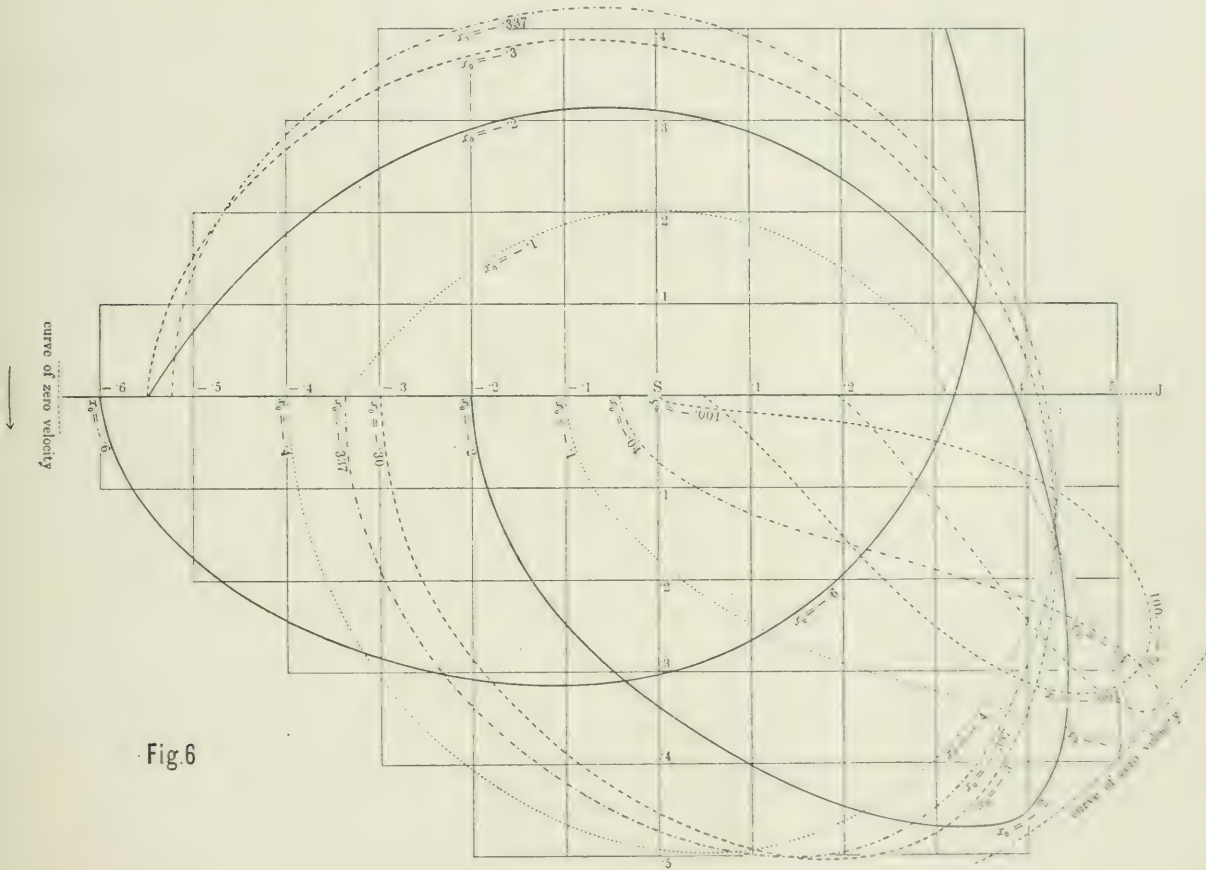


Fig.6

Non-periodic orbits round the Sun; $C=39.0$

When $C=40.18$ there is a third periodic orbit consisting of the point $x = .7175$, $y = 0$. At this point a body is in unstable equilibrium, and this point is the beginning of a family of orbits; for, whilst in general periodic orbits begin in pairs, a single orbit may begin at a point.

In discussing these figures I shall denote the initial value of any function by the suffix 0; the suffix 1 will denote the value after the completion of a half circuit, and the suffix 2 the value on the completion of the whole circuit.

The planet A starts from $x_0 = -.414$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases.

When $x_0 \leq -.414$, $\varphi_1 \leq 0$, $x_2 \geq x_0$ ($x_0 < -.414$ of course denotes a starting point more remote from S , with x_0 numerically greater than $.414$).

This orbit is stable with $c = 2.81$.

The satellite A starts from $x_0 = 1.03341$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases.

This orbit changes its shape rapidly with changes of C , as will appear below in the classification by families. Great care was bestowed on this case, and it was very troublesome to compute, since a considerable variation of x_0 corresponded with a small variation of φ_1 .

When $x_0 \geq 1.03341$, $\varphi_1 - \pi \leq 0$, $x_2 \leq x_0$.

The orbit is stable, but borders closely on instability, with $c = 3.7$.

The third orbit is the oscillating satellite a , moving slowly with a retrograde revolution round the point of zero force $x = .7175$, $y = 0$, which was described above as the commencement of a series of orbits.

The orbit a starts from $x_0 = .705$, $\varphi_0 = 0$, and φ diminishes.

When $x_0 \geq .705$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$. That is to say if the body starts too near to Jove the change of direction at the sharp turn is not quite sufficient for periodicity; and if it starts too near the Sun the converse is true. In the first case after one or more circuits the body passes away towards J , and in the second case towards S .

This orbit is very unstable, and the instability is almost certainly of the even type.

Plate I, fig. 2. $C = 39.5$ and 39.3 .

The planetary orbit A ($C = 39.5$) differs little from the preceding case.

It starts from $x_0 = -.424$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases.

When $x_0 \leq -.424$, $\varphi_1 \leq 0$, $x_2 \geq x_0$.

The orbit is stable with $c = 2.90$; but it is less stable than when $C = 40$.

The classification by families below shows that as C falls below 40.0 , the orbit of the satellite A stretches out rapidly towards S , and at the same time the oval a expands. When C is very little greater than 39.5 (perhaps about 39.6), these two curves touch one another.

At this stage the body may either move entirely on A or entirely on a , or it may move alternately on A and on a , thus describing a figure-of-8.

When C has diminished to 39.5 there is no alternative; for the orbit A is necessarily a figure-of-8, whilst the orbit a remains a closed oval.

The satellite A starts from $x_0 = 1.0650$, $\varphi_0 = 0$, and φ begins increasing. When the body has passed half round J so that y vanishes, φ is equal to $\pi - 15^\circ 37'$; shortly after this φ diminishes and continues doing so until when y again vanishes $\varphi_1 = 0$.

We have $x_0 \geq 1.0650$, $\varphi_1 \leq 0$. When the body starts too far from J , it will move in some orbit round J , and when it starts too near J it will pass away to S .

This orbit is very unstable with even instability.

The oscillating orbit a was not computed for $C = 39.5$;¹ during one part of its course it would be indistinguishable from part of A , and the rest is shown conjecturally by a dotted line.

This orbit is very unstable, with even instability.

It has already been remarked that after the first half circuit of satellite A φ was $\pi - 15^\circ 37'$, or as we may now write it $\pi - \varphi_1 = 15^\circ 37'$. Now when x_0 is made to increase from 1.0650 until it reaches the curve $2\Omega = C$, $\varphi_1 - \pi$ will always be negative, or $\pi - \varphi_1$ positive. It appears however that $\pi - \varphi_1$ has a minimum value, which very nearly reaches zero. In fact when $x_0 = 1.140$, $\varphi_1 = \pi - 0^\circ 20'$.

Since $\pi - \varphi_1$ is large when x_0 approaches $2\Omega = C$, and is $15^\circ 37'$ when $x_0 = 1.0650$, it follows that if it vanishes at all, it must vanish twice. That is to say if there is another periodic orbit, there must be two.

As C diminishes the minimum value of $\pi - \varphi_1$ falls, and I found that when $C = 39.4$ the minimum is reached when x_0 is about 1.15; for this value of x_0 , $\pi - \varphi_1$ is $0^\circ 9'$, and there is still no value of x_0 for which $\pi - \varphi_1$ vanishes.

But when $C = 39.3$ I computed the four orbits $x_0 = 1.18, 1.17, 1.16, 1.15$ and found that for the two middle ones $\pi - \varphi_1$ was negative. By interpolation the pair of periodic orbits B and C were found.

The orbit B is given by

$$x_0 = 1.1575, \quad \varphi_0 = 0;$$

and the orbit C by

$$x_0 = 1.1751, \quad \varphi_0 = 0.$$

In both cases φ increases.

The relationship to the neighbouring orbits is given by the inequalities

$$x_0 > 1.1751, \quad \varphi_1 - \pi < 0, \quad x_2 < x_0.$$

$$\begin{aligned} &< 1.1751 \\ x_0 &> 1.1575, \quad \varphi_1 - \pi > 0, \quad x_2 > x_0. \end{aligned}$$

$$x_0 < 1.1575, \quad \varphi_1 - \pi < 0, \quad x_2 < x_0.$$

¹ At least the computation was not completed, for it was found to be so troublesome, that it appeared that the work could be better bestowed elsewhere.

The orbit B is slightly unstable, with even instability, and $c = .156\sqrt{-1}$; the orbit C is stable, but approaches instability, and $c = 2.163$.

Plate II, fig. 1. $C = 39.0$.

These are the periodic orbits which belong to the families of non-periodic orbits shown in figs. 3, 4, 6 above.

The planetary orbit A starts from $x_0 = -.434$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases. The incidence amongst the neighbouring orbits is shown by the inequalities

$$x_0 \leq -.434, \varphi_1 \leq 0, x_2 \geq x_0.$$

This orbit is unstable with slight uneven instability and $c = 1 + .10\sqrt{-1}$. It thus appears that for some value of C between 39.5 and 39.0 we should find the passage of the planetary orbit A from stability to instability. It is certainly surprising to find that the instability of the planet sets in when the planet is a little less than half way to Jove at conjunction.

The satellite A starts from $x_0 = 1.0941$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases until when y vanishes it is equal to about $\pi - 13^\circ 30'$; it then diminishes to zero.

Its incidence among neighbouring orbits (figs. 3 and 4) is given by the inequalities

$$x_0 \geq 1.0941, \varphi_1 \leq 0.$$

When it starts too far from Jove it will move in some orbit round J , and when it starts too near Jove it will pass away towards S .

This orbit is very unstable, with even instability and $c = .46\sqrt{-1}$. The orbit of the oscillating satellite a is indistinguishable from A throughout part of its course, but falls more remote from J on the side towards S . It starts from $x_0 = .687$, $\varphi_0 = 0$, and φ diminishes.

When $x_0 \geq .687$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$; thus if the body starts too near Jove the total change of direction is insufficient for periodicity; and if it starts too near the Sun the converse is true. In the first case it passes away towards Jove, and in the second towards the Sun.

This orbit is very unstable with even instability, and c is about $2\sqrt{-1}$.

The satellite *B* starts with $x_0 = 1.1500$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases.

When $x_0 \geq 1.1500$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$, $x_2 \geq x_0$.

This orbit is unstable, with even instability, and $c = .38\sqrt{-1}$.

The satellite *C* starts with $x_0 = 1.2338$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases.

When $x_0 \geq 1.2338$, $\varphi_1 - \pi \leq 0$, $x_2 \leq x_0$.

This orbit is stable, with $c = 2.46$.

Plate II, fig. 2. $C = 38.5$.

The planet *A* starts from $x_0 = -.444$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases.

When $x_0 \leq -.444$, $\varphi_1 \leq 0$, $x_2 \geq x_0$.

The orbit is unstable, with uneven instability and $c = 1 + .18\sqrt{-1}$.

The satellite *A* starts from $x_0 = 1.1164$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases until when y vanishes it is equal to about $\pi - 12^\circ$; it then diminishes to zero. It will be observed that at the first vanishing of y , the curve cuts the axis more nearly at right angles than was the case when $C = 39.0$ and 39.5 . When $x_0 \geq 1.1164$, $\varphi_1 \leq 0$. When it starts too far from Jove it will move in some orbit round *J*, and when it starts too near Jove it will pass away to the Sun. The orbit is very unstable, with even instability.

The oscillating satellite *a* starts with $x_0 = .6814$, $\varphi_0 = 0$, and φ diminishes. When $x_0 \geq .6814$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$. In the first case it passes away towards Jove, in the second towards the Sun. The orbit is very unstable with even instability.

The satellite *B* starts with $x_0 = 1.1497$, $\varphi_0 = 0$ and φ increases.

When $x_0 \geq 1.1497$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$, $x_2 \geq x_0$.

The orbit is unstable with even instability, and $c = .70\sqrt{-1}$.

The satellite *C* starts with $x_0 = 1.2760$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases.

When $x_0 \geq 1.2760$, $\varphi_1 - \pi \leq 0$, $x_2 \leq x_0$.

This orbit is very unstable, and as will appear below the instability is uneven. There has in fact been a passage from stability to uneven instability for some value of C between 39.0 and 38.75 .

This orbit is interesting because it corresponds almost exactly to the cusped orbit described by Mr HILL as the moon of greatest lunation. It would seem however that this description is incorrect, for the satellite *C* moves with a still longer period when the cusp is replaced by a loop. Mr HILL's orbit was, on the account of his approximation, necessarily a

symmetrical one with reference to the line of quadratures, but it will be observed that when the solar parallax is taken into account the orbit is very unsymmetrical.

When $C = 38.88$ a new periodic orbit arises in the point $x_0 = 1.3470$, $y = 0$ marked in the figure. This is the beginning of a second family of oscillating satellites, referred to here as b .

When $C = 38.5$ this orbit begins with $x_0 = 1.2919$, $\varphi_0 = 0$, and φ diminishes.

When $x_0 \geq 1.2919$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$. That is to say if the body starts too far from Jove for periodicity, it will pass away in an orbit as a superior planet; if on the other hand it starts too near Jove for periodicity, it will pass to some orbit about Jove. This orbit is very unstable.

Plate III, fig. 1. $C = 38.0$.

The planet A starts from $x_0 = -.455$, $\varphi_0 = \pi$, and φ increases.

When $x_0 \leq -.455$, $\varphi_1 \leq 0$, $x_2 \geq x_0$.

The orbit is unstable, with uneven instability, and $c = 1 + .193\sqrt{-1}$.

The satellite A starts from $x_0 = 1.1305$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases.

When $x_0 \geq 1.1305$, $\varphi_1 \leq 0$. The remarks concerning this orbit in previous cases apply again here.

At the point where the orbit crosses the axis of x for the second time $\pi - \varphi$ is less than it was in the preceding case.

The oscillating satellite a starts from $x_0 = .6760$, $\varphi_0 = 0$ and φ decreases.

When $x_0 \geq .6760$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$. It is very unstable, with even instability.

The satellite B starts from $x_0 = 1.1470$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases. When $x_0 \geq 1.1470$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$, $x_2 \geq x_0$. The orbit is very unstable with even instability, and $c = .96\sqrt{-1}$.

The orbit B is on the point of coalescing with part of the orbit A , for the crossing point of the figure-of-8 in A is tending to become perpendicular to SJ , and the two curves nearly coincide.

The satellite C starts from $x_0 = 1.2480$, $\varphi_0 = 0$, and φ increases.

When $x_0 \geq 1.2480$, $\varphi_1 - \pi \leq 0$, $x_2 \leq x_0$.

This orbit was very troublesome, and is not computed with a high degree of accuracy. A very small variation of C would make a large change in the size of the loops in the curve.

The orbit is very unstable with uneven instability.

The oscillating satellite b starts with $x_0 = 1.2595$, $\varphi_0 = 0$, and φ decreases.

When $x_0 \geq 1.2595$, $\varphi_1 - \pi \geq 0$. The remarks made concerning this curve for $C = 38.5$ apply again here.

This orbit is very unstable.

The orbit C seems to be about to coalesce, in part of its course, with the loop b .

§ 18. Classification of orbits by families.

Several orbits are given in this classification which were not included in § 17.

Table of results.

ant gy	Coord. of starting point	Synodic Period	Criterion of Stability	Apparent advance of pericentre in synodic period	Regression of pericentre in sid. period	Description of instability	Modulus of instability	Remarks
	x_0	nT	$\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\varphi_0}$	$2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right)$	$2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right)$		$\frac{\log \sqrt{2}}{\log [D + \sqrt{D^2 \pm 1}]}$	
Satellite <i>A</i> , Plate IV, fig. 1.								
5	1°1135	61°20'	+ .112	39° 0'	22°20'	{ minimum of criterion maximum of x_0
25	1°1150	65°40'	+ .063	29° 0'	31° 0'	
2	1°1090	66°50'	+ .064	29°10'	31°40'	
0	1°0334	98° 0'	+ .226	303°	— 161°	minimum of x_0
5	1°0650	229°	— ?	even	?	Figure-of-8 begins
	1°0941	240°	— 1°06	even	0.5	
5	1°1164	258°	— ?	even	?	
0	1°1305	299°	— ?	even	?	
Satellite <i>B</i> , Plate IV, fig. 2.								
3	1°1575	87°40'	— .061	even	1.42	
0	1°1500	97° 0'	— .402	even	0.58	
5	1°1497	113°20'	— 1.82	even	0.31	
0	1°1470	131°50'	— 4.5	even	0.23	
Satellite <i>C</i> , Plate IV, fig. 3.								
3	1°1751	89°20'	+ .064	81° 0'	24°30'	maximum of x_0
0	1°2338	114° 0'	+ .435	82°40'	23°30'	
75	1°2873	179°30'	+ 1.95	uneven	0.4	
5	1°2760	210°50'	> + 1	uneven	?	
0	1°2480	235°20'	> + 1	uneven	?	

Constant of Energy C	Coord. of starting point x	Synodic Period nT	Criterion of Stability $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$	Apparent advance of pericentre in synodic period $2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right)$	Regression of pericentre in sid. period $2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right)$	Description of instability	Modulus of instability $\frac{\log \sqrt{2}}{\log [D + \sqrt{D^2 \pm 1}]}$	Remarks
Oscillating Satellite a .								
40.18	.7175	— ?	even		a point on SJ
40.0	.705	138°	— ?	even	?	
39.5	.693	?	— ?	even	?	
39.0	.687	146°	— 148	even	0.1	
38.5	.681	150°	— ?	even	?	
38.0	.676		— ?	even	?	
Oscillating Satellite b .								
38.88	1.3470	?			?	?	a point on SJ
38.5	1.2919	214° ?	?	?	?	
38.0	1.2595	208° ?	?	?	?	
Planet A , Plate IV, fig. 4.								
40.0	— .414	154°	+ .91	145°	6° 30'	
39.5	— .424	165°	+ .98	162°	2°	
39.0	— .434	177°	+ 1.03	uneven	2.1	
38.5	— .444	191°	+ 1.08	uneven	1.25	
38.0	— .455	207°	+ 1.09	uneven	1.14	

Although the above table gives most of the facts, it will be well to draw attention to a few important points.

The passage of the family A of satellites into the figure-of-8 form is interesting. When C lies between 40.18 and some value a little less than 40.0, the oval orbit A and the oval a must be considered, in an algebraical sense, as a single orbit. But I think that we must imagine a to be described twice, so that when one of the two a orbits fuses with A to form the 8, the other may maintain a separate existence. The doctrine of the double nature of a receives confirmation from what is pointed out below in § 19 as to the manner in which the C orbit fuses with the oval b .

I think it is almost certain that a more complex sort of figure-of-8 also exists, for we may imagine a body which describes two, three or

more circuits round the point of zero force in an oval like a , before passing off into the branch round Jove.

We have seen that the confluence of a circuit round a alone with a circuit round a and round A leads to a figure-of-8 and a circuit round a . It seems likely then that a pair of complex figures-of-8, one with a double circuit round a and the other with a triple circuit may spring from a single orbit. However these orbits can hardly be described as simply periodic, and I have not considered them in detail.

It appears from our table that the satellite orbit A is stable, but with only a very small margin of stability when $C = 40$. It is worthy of note that the criterion of stability after passing a minimum value of $\cdot 063$, is rapidly increasing, so that the orbit is tending towards uneven instability. I do not know whether or not that instability has set in before the fusion with the oval a and the formation of the figure-of-8 orbit A ; but the figure-of-8 is evenly unstable, and we thus have the fusion of a stable, or unevenly unstable, orbit with an evenly unstable orbit, and the resultant is evenly unstable.

This throws light on the fusion of the planetary orbit A with the oval a , which must occur for a value of C less than 38. In the case of the planet we have seen that $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ has increased until it is greater than unity and there has as yet been no fusion with a . Hence amongst the planetary orbits we shall have the fusion of an unevenly unstable orbit with an evenly unstable one, and the resultant will be evenly unstable.

Mr HILL has drawn an interesting family of orbits of satellites, beginning with the orbit of the moon and ending with a cusped orbit. Now our moon undoubtedly belongs to the family A , whilst the cusped and looped orbits belong to the family C . He neglects the solar parallax, and this approximation has in fact led to the absorption of two families into one another. It appears now that it is not possible to comprehend the part played by this class of orbit without the inclusion of the solar parallax, for the asymmetry of the family C with regard to the line of quadratures is an essential feature in it. This will appear still more clearly in the next section.

Mr HILL draws attention to the minimum of distance at syzygies

in the orbits of satellites, and this is observable in our family *C*, but we also find a maximum of distance in the family *A* at the superior syzygy.

The periods of some of the satellites is extraordinarily long, that of the last figure-of-8 *A* being $\frac{299}{360}$ or $\frac{5}{6}$ of that of Jove, and that of the last looped orbit *C* being $\frac{235}{360}$ or nearly $\frac{2}{3}$ of that of Jove.

§ 19. *On the probable forms of periodic orbits for values of C less than 38.*

It is obvious from Plate III, fig. 1 that a portion of the figure-of-8 orbit *A* and the orbit *B* will coalesce for some value of *C* a little less than 38.0. The oval *a* will however continue to exist and to expand.

The planetary orbit *A* will continue to expand, but the heliocentric distance at the conjunction remote from *J* will shortly reach a maximum and will then diminish, whilst the heliocentric distance at the other conjunction will increase rapidly. This will continue until the planetary orbit *A* touches the oval *a*; a new series of figure-of-8 planetary orbits will then arise, and the heliocentric distance at the remote conjunction will then increase.

At some stage a pair of new planetary orbits *B* and *C* will arise from a single orbit; of these *B* will be evenly unstable and *C* stable.

The orbit *B* will expand, coalesce with a portion of *A*, and then both will disappear.

Reverting now to the satellite *C*, we are able to foresee its future course. The fig. 2, Plate II and fig. 1, Plate III or fig. 3, Plate IV, show the growth of the two loops from two cusps. In order to throw light on the future development of these curves I have drawn Plate III, fig. 2, which shows a non-periodic orbit for $C = 38.5$;¹ in it we see that the upper loop has descended below the line of conjunction, and the lower loop has risen above. For some value of *C* a little less than

¹ It would have been better to have drawn the similar curve for $C = 38.0$, but this one suffices for the present purpose.

38 there must be a periodic orbit of this general form. We shall thus have a periodic orbit with five full moons in the month. In this sort of orbit the crossing point P will be at first a point of contact; the distance JP will then diminish to a minimum and afterwards increase. When P has moved outwards and Q has moved inwards, so as to meet, the upper loop will have spread so as to coincide with the lower, and the lower with the upper, and both will coincide with the oval b . I think that after this stage the orbit C will disappear, but the oval b will continue to exist.

This conclusion is interesting when taken in connection with the looped orbit to which M. POINCARÉ¹ drew attention, and which has been traced by Lord KELVIN.² They both neglected the solar parallax, and with the degree of approximation adopted by them, the central space might be made as small and the loops as large as we like. But the inclusion of the solar parallax now appears to be essential to the proper consideration of these orbits.

It appears from fig. 1 that when $C = 34.91$, there is a new periodic orbit consisting of the point $x = -0.9469, y = 0$. This point is the origin of a new family of oscillating planets, say c , which describe ovals with retrograde revolution round the point of zero force, for values of C less than 34.91

Turning now to our conjectural planetary orbit C , we see that whilst initially it will be nearly circular, it will ultimately produce two excrescences near the ends of the oval c . These excrescences will become cusps, and then loops; the loops will cross one another, become identical with one another and with the oval c , and the orbit C will probably then disappear.

The case of the superior planets has not yet been considered, and there is not much concerning them of which I feel confident.³ It is obvious however that they are described with an apparently retrograde revolution, and that they contract as C falls in value. The orbits will be nearly circular, but will bulge inwards in the neighbourhood of Jove. At

¹ Méc. Céle., p. 109.

² Phil. Mag., Nov. 1892.

³ I have now (July 1897) traced some of them.

some stage the inward depression of the orbit will meet the oval b in contact. This stage will be the commencement of a new family of orbits, having the form of a sort of inverted figure-of-8. If the old figure-of-8 be likened to two circles touching one another externally, the new figure may be compared with a small circle touching a large one internally. A similar series of changes must ultimately take place with the oval c , and probably we may have an orbit with loops at both ends of the line of conjunctions.

I will not hazard detailed conjectures as to the future of the three ovals a, b, c . I think however that it is probable that they will stretch out towards the vertices of the two equilateral triangles which may be erected on SJ as base. These vertices must be themselves the origins of a pair of similar ovals, and perhaps the extremities of a, b, c will stretch out to contact with this fourth system of ovals.

§ 20. *Classification of stable orbits of satellites.*

We have seen that amongst satellites there are two classes of stable orbits, namely those of the A and C families. Plate III, fig. 3 exhibits the limits of the orbits which have been shown to be stable. The exact orbits which possess limiting stability would of course differ slightly from those drawn in this figure.

When C is large the stable orbits of the A family are approximate circles of small radius. As C decreases the orbits swell, but when C reaches 40.25 the radius vector at superior syzygy reaches a maximum. Hence the orbit $x_0 = 1.1150$, $C = 40.25$ gives one limit of the stable orbits of this family. The orbit $x_0 = 1.0334$, $C = 40.0$ gives approximately another limit as regards the inferior syzygy. The shaded space between these two orbits is filled with stable orbits.

The stable orbits of the C family begin when C is a little greater than 39.3, and the first one traced is that for which $x_0 = 1.1751$ and $C = 39.3$. The stability of these orbits still subsists when $C = 39.0$, but this orbit is already very unstable when C has fallen to 38.75. Accordingly I take for the other limit of orbits of this kind $x_0 = 1.2338$, $C = 39.0$. The shaded space between these two is filled with stable orbits.

It will be observed that there remains an unshaded tract within which no stable orbit can exist. I think moreover that it is probable that with a smaller mass for Jove we should have found a complete annulus within which stability is impossible.

This conclusion is interesting when viewed in connection with the distribution of the satellites and planets of our system, and it appears to me to be the first exact result, which throws any light on Bode's empirical law as to the mean distances of planets and satellites from their primaries.

It is as yet too soon to make a similar classification of stable planetary orbits, but this will follow in due course.

We have seen in an earlier section that unstable orbits are such as ultimately to lead to the absorption of bodies moving in them into one or other of the perturbing centres. If there were a large number of perturbing centres, as in our planetary system, the problem would become incomparably more difficult, but I think that the present investigation affords evidence that if we were to have a system consisting of a large planet moving round the sun, and of a cloud of infinitesimal bodies circling about them, a system would ultimately be evolved where there would be inferior and superior planets and a pair of satellites moving in certain zones indicated by our figures.

Postscript.

It is stated in § 3, p. 112 that if the third body be placed at the vertex of the equilateral triangle drawn on SJ , it is stable. I have to thank Mr S. S. HUGH for pointing out to me that this is not universally true, but that if Jove is greater in mass than one twenty-fifth of the Sun, such a body is unstable.

This may be proved as follows:

The coordinates of the point for which $r = \rho = 1$ are $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; also $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$, but $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{3}{4}(\nu + 1)$, $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{3}{4}\sqrt{3}(\nu - 1)$,

$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{9}{4}(\nu + 1)$. Hence at a point whose coordinates are $x = \frac{1}{2} + \xi$,
 $y = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \eta$,

$$2Q = 3(\nu + 1) + \frac{3}{4}(\nu + 1)\xi^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}(\nu - 1)\xi\eta + \frac{9}{4}(\nu + 1)\eta^2 + \dots,$$

and the equations of motion are

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} = \frac{3}{4}(\nu + 1)\xi + \frac{3}{4}\sqrt{3}(\nu - 1)\eta,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\frac{d\xi}{dt} = \frac{3}{4}\sqrt{3}(\nu - 1)\xi + \frac{9}{4}(\nu + 1)\eta.$$

Noting that $n^2 = \nu + 1$, and assuming $\xi = ae^{\lambda t}$, $\eta = be^{\lambda t}$, we easily find

$$\lambda^4 + (\nu + 1)\lambda^2 + \frac{27}{4}\nu = 0.$$

It is clear that if $(\nu + 1)^2 > 27\nu$, λ^2 is negative, and the motion is oscillatory; but if $(\nu + 1)^2 < 27\nu$, λ is semi-imaginary and the solution will represent an oscillation with increasing amplitude.

The limiting value of ν consistent with stability is therefore given by $(\nu + 1)^2 = 27\nu$, the solution of which is $\nu = 24.9599$. The second solution is of course the reciprocal of the first.

In the numerical work in this paper I have taken $\nu = 10$, and there will accordingly be no stable orbits encircling the point $r = \rho = 1$.

APPENDIX.

Computations of Periodic Orbits, and of their Stability.

Explanation.

The orbits are given in families, arranged according to descending values of C , the constant of relative energy. The families are distinguished by the initials A, B, C, a, b . The initial A is attached to one of the families of satellites and also to the family of planets, because the satellite A appears to bear the same relationship to Jove and the Sun that the planet A bears to the Sun and Jove.

The data for the orbits are given as follows: — The first column is the arc of the relative orbit measured from conjunction; the second and third are the rectangular coordinates $x - 1, y$ for satellites, or x, y for planets; the fourth gives φ the inclination of the outward normal to the line SJ ; the fifth and sixth are the coordinates ρ, ϕ for satellites, or r, θ for planets; the last column contains the function $2n/V$.

The last column is given so that the reader may be enabled to complete the solution, by drawing the orbit with reference to axes fixed in space. The integral $\frac{1}{2} \int \frac{2n}{V} ds$ would give nt , that is to say the angle turned through by the rotating axes since conjunction; then the polar coordinates with reference to Jove are $\rho, \phi + nt$, or with reference to the Sun are $r, \theta + nt$.

In the case of the oscillating bodies (families a and b) the polar coordinates are not given, but the rectangular coordinates with reference to axes fixed in space are clearly

$$x \cos nt - y \sin nt, x \sin nt + y \cos nt$$

for heliocentric origin, and

$$(x-1) \cos nt - y \sin nt, (x-1) \sin nt + y \cos nt$$

for jovicentric origin.

The last line of these tables gives the value of the arc and of φ when y vanishes. If the orbit were rigorously periodic and were computed with absolute accuracy, this angle would be 180° or 0° . It may be remarked that in some cases a small change in the initial value of x leads to a large change in the final value of φ , and in other cases the converse is true. Thus in some cases it is necessary to continue the search until the final value of φ only differs from 180° or 0° by a few minutes of arc, and in others even an error of a degree of arc is unimportant. The coordinates are certainly given with sufficient accuracy to draw the figures on a large scale.

Finally there is given the time-integral nT , being twice the angle turned through by the rotating axes between the first orthogonal crossing of SJ and the second (closely approximate) orthogonal crossing. Since the circuit is completed at the third crossing T is the period, and the ratio of nT to 360° is the ratio of the period of the body to that of Jove.

After the coordinates the discussion of the stability is given.

In order to test the sufficiency of the harmonic expansion of ϕ to represent that function, a comparison is given between nine of the equidistant values of ϕ with the corresponding values derived from a synthesis of the harmonic series, which has been calculated as far as the eighth order inclusive. Following this comparison is ϕ_0 the mean value of ϕ .

In the cases where the orbit is stable the value of c is given, and certain functions of it. The function $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ or $\sin^2 \frac{1}{2} \pi c$ is what is called in the table of § 18 the Criterion of Stability. The function $2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right)$ gives the retrogression of the pericentre, with respect to the rotating axes, in the synodic period. The function $nT - 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right)$ gives the advance of pericentre, with respect to fixed axes, in the synodic period. And $2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right)$ gives the advance of the pericentre, with respect to fixed axes, in the sidereal period.

Where the orbit is unstable, when the determinant Δ is negative the instability is of the even type, and when $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ is greater than unity the instability is of the uneven type. The modulus of instability, or the number of synodic circuits, in which the amplitude of displacement increases to twice its primitive value, is given.

When the instability is of the even type c is of the form $2n + k\sqrt{-1}$, and when of the uneven type it is of the form $2n + 1 + k\sqrt{-1}$; in the tables c is given in one or other of these two forms.

FAMILY A OF SATELLITES.

$$C = 40.5$$

$$x_0 = 1.1135$$

s	$x - 1$	y	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .1135	+ .0000	0° 0'	.1135	0° 0'	2.423
3	.102	.298	12° 56'	.41	15° 7'	.441
6	.002	.580	25° 58'	.58	30° 4'	.492
9	.0841	.832	39° 15'	.83	44° 5'	.574
.12	.625	.1040	52° 56'	.1213	58° 59'	.679
5	.366	.189	67° 10'	.44	72° 54'	.792
8	+ .078	.269	82° 0'	.71	86° 30'	.893
.21	— .0222	.271	$\pi - 82^\circ 42'$.90	$\pi - 80^\circ 7'$.960
4	.511	.194	67° 20'	.98	66° 51'	.975
7	.769	.044	52° 24'	.96	53° 36'	.936
.30	.981	.0833	38° 17'	.87	40° 19'	.870
3	.1137	.578	24° 58'	.76	26° 55'	.803
6	.233	+ .294	$\pi - 12^\circ 16'$.66	$\pi - 13^\circ 24'$.757
.39	— .1265	— .0004	$\pi + 0^\circ 6'$.1265	$\pi + 0^\circ 11'$	2.740
.3896		.0000	$\pi - 0^\circ 3'$			

$$nT = 61.23$$

Family *A* of satellites continued.

Stability of $x_0 = 1.1135, C = 40.5$.

Comparison					
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	3.19	3.18	a_8	7.28	7.22
a_2	3.84	3.84	a_9	5.80	5.91
a_3	4.67	4.66	a_{10}	5.01	4.86
a_4	5.81	5.83	a_{12}	3.19	3.00
a_6	8.04	8.04			

$$\phi_0 = 5.479.$$

The harmonic series represents ϕ well.

The determinant gives $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = .1119, c = 2.217,$

$$2\pi\left(\frac{1}{2}c - 1\right) = 39^\circ 4', nT - 2\pi\left(\frac{1}{2}c - 1\right) = 19^\circ 42', 2\pi\left(1 - \frac{\frac{1}{2}c}{1 + \frac{nT}{2\pi}}\right) = 22^\circ 19'.$$

The orbit is stable.

$C = 40.25$

$x_0 = 1.1150$

s	$x - 1$	y	φ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .1150	+ .0000	0° 0'	2.418
3	.118	.298	12° 24'	.437
6	.022	.583	24° 53'	.496
9	.0867	.839	37° 34'	.587
.12	.659	.1054	50° 36'	.708
5	.407	.216	64° 12'	.846
8	+ .124	.312	78° 29'	.978
.21	— .0175	.333	$\pi - 86^\circ 39'$	3.079
4	.469	.277	71° 31'	.120
7	.739	.146	56° 43'	.097
.30	.966	.0952	42° 42'	.033
3	.1142	.710	29° 37'	2.954
6	.260	.435	17° 20'	.886
9	.320	+ .141	$\pi - 5^\circ 33'$.854
.42	— .1319	— .0158	$\pi + 6^\circ 4'$	2.855
.4042		.0000	$\pi - 0^\circ 1'$	

$$nT = 65^\circ 40'$$

Family *A* of satellites continued.

Stability of $x_0 = 1.1150$, $C = 40.25$.

		Comparison			
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	2.928	2.936	a_8	7.839	7.865
a_2	3.652	3.650	a_9	6.050	6.036
a_3	4.574	4.580	a_{10}	4.383	4.384
a_4	5.885	5.881	a_{12}	2.947	2.932
a_6	8.718	8.730			

$$\phi = 5.574.$$

The harmonic series represents ϕ well.

The determinant gives $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = .0630$, $c = 2.161$,

$$2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 29^\circ 3', nT - 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 36^\circ 37', 2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right) = 30^\circ 58'.$$

The orbit is stable.

$C = 40.2$

$x_0 = 1.1090$

s	$x - 1$	y	φ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .1090	+ .0000	0° 0'	2.276
3	.058	298	12° 30'	.298
6	.0961	581	25° 1'	.362
9	.806	837	37° 38'	.467
.12	.598	.1052	50° 28'	.609
5	.346	215	63° 45'	.780
8	+ .064	314	77° 41'	.958
.21	— .0234	340	$\pi - 87^\circ 41'$	3.119
4	.529	289	72° 35'	.225
7	.800	163	57° 36'	.255
.30	.1031	.0972	43° 22'	.219
3	.210	732	30° 10'	.155
6	.331	458	17° 55'	.092
9	.394	+ 166	$\pi - 6^\circ 18'$.055
.42	— .1397	— .0134	$\pi + 5^\circ 6'$	3.053
.4066		.0000	$\pi - 0^\circ 0'$	

$$nT = 66^\circ 52'$$

Family A of satellites continued.

Stability of $x_0 = 1.1090, C = 40.2$.

Comparison					
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	2.627	2.573	a_6	8.640	8.753
a_2	3.300	3.296	a_9	6.692	6.635
a_3	4.186	4.139	a_{10}	4.760	4.758
a_4	5.498	5.601	a_{12}	3.093	3.033
a_6	8.184	8.345			

$\phi_0 = 5.593$

The harmonic series represents ϕ fairly well.

The determinant gives $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = .0636, c = 2.162,$

$2\pi\left(\frac{1}{2}c-1\right)=29^{\circ}14', nT-2\pi\left(\frac{1}{2}c-1\right)=37^{\circ}38', 2\pi\left(1-\frac{\frac{1}{2}c}{1+\frac{nT}{2\pi}}\right)=31^{\circ}44'.$

The orbit is stable.

$C = 40.0$

$x_0 = 1.03341.$

s	$x - 1$	y	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .03441	+ .00000	0° 0'	.03341	0° 0'	.939
1	3257	0995	9° 40'	3406	17° 0'	.950
2	3010	1963	18° 52'	3594	33° 7'	.981
3	2617	2882	27° 16'	3893	47° 46'	1.031
4	2101	3738	34° 44'	4288	60° 40'	.096
5	1484	4525	41° 17'	4762	71° 50'	.172
6	+ 0787	5241	47° 0'	5300	81° 28'	.259
8	- .00785	6472	56° 20'	6519	$\pi - 83^{\circ} 5'$.458
.10	2518	7467	63° 41'	7880	71° 22'	.690
2	4355	8256	69° 39'	9334	62° 11'	.958
4	6259	8866	74° 42'	10852	54° 47'	2.269
6	8207	9316	79° 12'	2416	48° 37'	.640
8	.10184	9617	83° 29'	4007	43° 22'	3.093
.20	2178	9769	87° 49'	5613	38° 44'	.664
2	4177	9762	$\pi - 87^{\circ} 17'$	7213	34° 33'	4.410
.24	- .16166	.09564	$\pi - 81^{\circ} 3'$.18783	$\pi - 30^{\circ} 37'$	5.406

Family *A* of satellites continued.

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>	φ	ρ	ϕ	$\frac{2n}{V}$
26	— .18111	.09111	72° 11'	.20274	$\pi - 26^\circ 42'$	6.745
7	9046	8758	66° 12'	.0963	24° 42'	7.525
8	9934	8300	58° 59'	.1594	22° 36'	8.330
9	.20752	7726	50° 39'	.2143	20° 25'	9.030
30	1474	7035	41° 46'	.2596	18° 8'	5.16
1	2081	6241	33° 11'	.2946	15° 47'	.730
2	2570	5369	25° 34'	.3200	13° 23'	.710
3	2949	4444	19° 9'	.3375	10° 58'	.563
4	3231	3485	13° 50'	.3491	8° 32'	.376
5	3431	2505	9° 21'	.3564	6° 6'	.209
6	3559	1514	5° 26'	.3608	3° 41'	.095
7	3622	+ .0516	$\pi - 1^\circ 49'$.3628	$\pi - 1^\circ 15'$.032
38	— .23623	— .00484	$\pi + 1^\circ 41'$	-.23628	$\pi + 1^\circ 10'$	9.032
.37516		.00000	$\pi - 0^\circ 1'$			

$$nT = 97^\circ 58'.$$

Stability of $x_0 = 1.03341$, $C = 40.0$.

		Comparison	
	Computed ϕ	Synthesis	
a_0	— 2.49	— 0.95	a_8 17.58 20.28
a_2	2.32	2.21	a_9 41.05 39.50
a_3	2.74	3.89	a_{10} 33.03 32.56
a_4	2.93	1.61	a_{12} 0.48 — 2.63
a_6	4.70	5.88	

$$\phi_0 = 10.124.$$

The representation of ϕ by the harmonic series is not very satisfactory, nevertheless it will serve to give the result with some approach to accuracy, for the following shows the gradual approximation to a definite value as the number of rows of the determinant is increased: —

No. of rows	Value of Δ
5	.000
9	.052
13	.233
15	.243
17	.246

Family A of satellites continued.

The determinant gives $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \psi_0 = .2264$, and $c = 3.684$;

$$2\pi \left(\frac{1}{2}c - 1 \right) = 303^\circ 10', nT - 2\pi \left(\frac{1}{2}c - 1 \right) = -205^\circ 12', 2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2}c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right) = -161^\circ 18'.$$

The margin of stability is obviously small.

$C = 39.5$

Figure-of-eight orbit, $x_0 = 1.065$.

s	$x - 1$	y	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .0650	+ .0000	0° 0'	.0650	0° 0'	1.434
2	631	199	10° 52'	662	17° 29'	.452
4	576	390	21° 17'	696	34° 9'	.508
6	487	570	31° 0'	750	49° 27'	.598
8	371	732	39° 52'	821	63° 7'	.718
10	233	876	47° 53'	907	75° 8'	.870
2	+ .076	.1000	55° 11'	.1004	85° 40'	2.053
4	- .0095	104	61° 57'	109	$\pi - 85^\circ 6'$.268
6	276	188	68° 21'	220	76° 55'	.522
8	466	252	74° 35'	336	69° 36'	.820
20	661	294	80° 56'	453	62° 57'	3.167
2	860	315	87° 38'	571	56° 48'	.573
4	.1060	310	$\pi - 85^\circ 0'$	685	51° 2'	4.039
6	257	279	76° 41'	793	45° 29'	.543
8	447	217	67° 20'	891	40° 4'	5.054
30	624	125	57° 15'	975	34° 42'	.463
2	783	002	47° 17'	.2045	29° 20'	.738
4	917	.0855	38° 17'	100	24° 2'	.856
6	.2030	690	30° 49'	145	18° 47'	.882
8	123	513	24° 58'	184	13° 36'	.876
40	200	329	20° 30'	224	8° 30'	.922
2	265	+ 139	17° 14'	269	$\pi - 3^\circ 31'$	6.053
4	320	- .0053	15° 1'	321	$\pi + 1^\circ 18'$.287
6	369	247	13° 54'	382	5° 56'	.690
8	417	441	14° 4'	458	10° 20'	7.425
9	442	538	14° 47'	501	12° 25'	.950
50	- .2469	- .0634	$\pi - 16^\circ 8'$.2550	$\pi + 14^\circ 24'$	8.688

Family A of satellites continued.

s	$x - 1$	y	φ	ρ	ψ	$\frac{2\pi}{V}$
51	— .2498	— .0729	$\pi - 18^\circ 27'$.2603	$\pi + 16^\circ 16'$	9.685
2	533	823	$22^\circ 26'$	663	$18^\circ 0'$	11.243
3	577	913	$30^\circ 4'$	733	$19^\circ 31'$	13.953
535	604	955	$36^\circ 54'$	773	$20^\circ 8'$	16.633
4	637	992	$48^\circ 27'$	818	$20^\circ 36'$	19.562
425	657	1007	$56^\circ 52'$	841	$20^\circ 45'$	21.083
45	679	019	$67^\circ 54'$	866	$20^\circ 49'$	23.755
475	703	025	$\pi - 82^\circ 2'$	891	$20^\circ 46'$	24.553
5	728	026	$+ 83^\circ 33'$	915	$20^\circ 36'$.220
525	753	020	$78^\circ 35'$	935	$20^\circ 20'$	22.752
555	775	009	$60^\circ 13'$	954	$19^\circ 59'$	21.190
56	814	.0979	$46^\circ 34'$	979	$19^\circ 11'$	17.987
65	848	942	$37^\circ 23'$	999	$18^\circ 19'$	15.257
7	876	901	$31^\circ 33'$.3014	$17^\circ 23'$	13.597
75	900	857	$27^\circ 13'$	024	$16^\circ 28'$	12.425
8	.922	812	$23^\circ 55'$	033	$15^\circ 31'$	11.445
9	958	719	$18^\circ 51'$	044	$13^\circ 40'$	9.910
60	987	624	$15^\circ 15'$	052	$11^\circ 47'$.280
1	.3011	526	$12^\circ 22'$	057	$9^\circ 55'$	8.666
2	030	428	$9^\circ 56'$	060	$8^\circ 3'$.220
4	058	.230	$5^\circ 50'$	067	$4^\circ 18'$	7.727
6	072	— .0031	$+ 2^\circ 22'$	072	$\pi + 0^\circ 35'$.540
8	— .3074	$+ .0169$	$- 0^\circ 53'$.3079	$\pi - 3^\circ 9'$	7.595
.66308	— .3073	.0000	$+ 1^\circ 49'$			

$$nT = 229^\circ 19'.$$

The above is not strictly periodic, since the final value of φ is $1^\circ 49'$; but I find that when $x_0 = 1.066$ the final value of φ is $-62^\circ 24'$, hence the periodic orbit should be $x_0 = 1.065028$. Since the above only differs from the true periodic in the fifth place of decimals of x_0 , I accept it as periodic. It would seem however as if the final value of $x - 1$ in the periodic orbit is about $-.305$ instead of $-.3073$, as in the above.

Stability of $x_0 = 1.065$, $C = 39.5$.

The determinantal method fails, because ψ varies from about -20 in one part of the orbit to more than 3000 in another, and the harmonic

Family *A* of satellites continued.

series gives so insufficient a representation of ϕ , when we stop with the term of the eighth order, that it does not seem worth while to form and evaluate the determinant.

The orbit is clearly very unstable, with instability of the even type, as appears below in the case when $C = 39.0$.

$C = 39.0$

Figure-of-eight orbit, $x_0 = 1.0941$.

It appeared from various computations that the periodic orbit should commence with $x_0 = 1.0941$.

Accordingly after the latter part of the orbit had been computed the first part was calculated.

s	$x - 1$	y	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .0941	+ .0000	0° 0'	.0941	0° 0'	1.875
2	927	200	7° 56'	948	12° 9'	.888
4	886	395	15° 42'	970	24° 2'	.928
6	819	583	23° 20'	.1005	35° 27'	.991
8	728	761	30° 38'	054	46° 17'	2.081
.12	485	.1077	44° 27'	181	65° 49'	.340
6	+ 174	329	57° 29'	340	82° 32'	.717
.20	— .0184	504	70° 41'	515	$\pi - 83^\circ 0'$	3.227
4	574	589	84° 51'	690	70° 8'	.880
8	971	565	$\pi - 76^\circ 44'$	842	58° 10'	4.562
.32	.1337	407	56° 48'	942	46° 26'	.904
6	633	139	39° 50'	991	34° 53'	.807
.40	853	.0806	27° 55'	.2020	23° 30'	.606
4	.2013	440	19° 35'	061	12° 20'	.525
8	127	+ 057	13° 59'	128	$\pi - 1^\circ 32'$.639
.52	— .2211	— .0334	$\pi - 10^\circ 49'$.2237	$\pi + 8^\circ 36'$	5.048

$\int_0^{.52} \frac{2n}{V} ds = 109^\circ 10'$. Also the value of φ where the curve crosses the axis of x for the second time is $\pi - 13^\circ 22'$.

Family *A* of satellites continued.

The following results in square parentheses were found by interpolation, between $x_0 = 1.09$ and $x_0 = 1.10$. Starting from these values the remainder of the orbit was computed as follows: —

s	$x - 1$	y	φ	ρ	ζ'	$\frac{2n}{V}$
[.44	— .2020	.0437	$\pi - 20^\circ 5'$			
[6	.084	.244	$17^\circ 4'$			
[8	.138	+ .055	$14^\circ 42'$			
[.50	.186	— .0139	$12^\circ 50'$.2190	$\pi + 3^\circ 38'$	4.847
2	.228	.334	$11^\circ 46'$.252	$8^\circ 32'$	5.104
4	.268	.530	$11^\circ 30'$.329	$13^\circ 9'$	5.504
6	.309	.726	$12^\circ 19'$.420	$17^\circ 27'$	6.117
8	.356	.920	$14^\circ 50'$.530	$21^\circ 20'$	7.092
9	.383	.1017	$17^\circ 10'$.591	$23^\circ 6'$.830
.60	.416	.111	$20^\circ 46'$.660	$24^\circ 42'$	8.888
.605	.435	.158	$23^\circ 18'$.695	$25^\circ 25'$	9.565
1	.456	.203	$26^\circ 37'$.734	$26^\circ 6'$	10.476
15	.480	.247	$31^\circ 4'$.776	$26^\circ 41'$	11.582
2	.508	.288	$37^\circ 16'$.820	$27^\circ 11'$	13.008
25	.541	.326	$46^\circ 17'$.866	$27^\circ 33'$	14.945
3	.580	.356	$59^\circ 46'$.914	$27^\circ 43'$	16.959
35	.627	.374	$\pi - 78^\circ 46'$.965	$27^\circ 37'$	19.068
4	.677	.374	+ $79^\circ 10'$.3009	$27^\circ 11'$	18.300
45	.724	.357	$62^\circ 30'$.043	$26^\circ 29'$	16.370
5	.765	.330	$51^\circ 3'$.068	$25^\circ 41'$	14.408
55	.801	.295	$42^\circ 57'$.087	$24^\circ 40'$	12.815
6	.833	.257	$37^\circ 7'$.099	$23^\circ 55'$	11.582
65	.862	.216	$32^\circ 41'$.109	$23^\circ 1'$	10.638
7	.888	.173	$29^\circ 13'$.117	$22^\circ 6'$	9.932
75	.911	.129	$26^\circ 22'$.121	$21^\circ 12'$.180
8	.932	.084	$23^\circ 58'$.126	$20^\circ 17'$	8.732
85	.952	.038	$21^\circ 52'$.129	$19^\circ 22'$.305
9	.969	.0991	$20^\circ 3'$.131	$18^\circ 27'$	7.086
.70	.3001	.896	$16^\circ 56'$.133	$16^\circ 38'$.379
1	.028	.800	$14^\circ 22'$.132	$14^\circ 48'$	6.953
2	.050	.702	$12^\circ 8'$.130	$12^\circ 58'$.647
3	.070	.604	$10^\circ 8'$.129	$11^\circ 8'$.380
5	.099	.406	$6^\circ 41'$.126	$7^\circ 28'$.053
7	.117	.207	$3^\circ 37'$.124	$3^\circ 48'$	5.862
9	.124	— .007	+ $0^\circ 43'$.124	$\pi + 0^\circ 8'$.789
.81	— .3122	+ .0103	— $2^\circ 8'$.3128	$\pi - 3^\circ 32'$	5.847

Family *A* of satellites continued.

Integrating $\frac{2n}{V}$ from the completion of the half circuit to $s = .52$, I find $\int_{.52}^{.5s} \frac{2n}{V} ds = 130^\circ 33'$, and combining this with the previous integral, we have $nT = 239^\circ 43'$.

Stability of $x_0 = 1.0941$, $C = 39.0$.

Comparison					
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	2.59	1.76	a_6	5.51	8.34
a_1	4.27	5.24	a_7	— 8.43	— 11.01
a_2	8.89	7.68	a_8	— 13.95	— 13.86
a_3	18.68	19.65	a_9	— 0.87	+ 3.55
a_4	44.10	44.18	a_{10}	+ 31.93	+ 39.87
a_5	41.49	39.87	a_{11}	— 18.92	— 4.86
			a_{12}	— 18.28	— 33.96

$$\phi_0 = 8.74.$$

The computed and synthetic values of ϕ present some concordance, but the representation of ϕ by the harmonic series is unsatisfactory.

The harmonic constituents being however used in the determinant give $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = -1.063$, $c = .46 \sqrt{-1}$, modulus = .48.

The orbit is very unstable with even instability.

$C = 38.5$

Figure of-eight orbit, $x_0 = 1.1164$.

This orbit was exceedingly troublesome, and the coordinates were found by several interpolations. After the calculations were completed an error was discovered which may be substantially corrected by increasing all the arcs by .0001. The following figures to three places of decimals suffice for drawing the curve with fairly close accuracy. I have not thought it worth while to recompute the whole, and only give the interpolated coordinates and function $\frac{2n}{V}$.

Family *A* of satellites continued.

s	$x - 1$	y	$\frac{2n}{V}$
·00	+ ·1164	+ ·000	2·20
4	·12	40	·25
8	·099	78	·39
·12	79	·112	·63
6	52	41	·99
·20	+ 19	65	3·49
4	— ·017	80	4·13
8	57	85	·81
·32	96	77	5·12
6	·129	55	4·85
·40	56	25	·39
4	75	·090	·07
8	90	53	3·90
·52	·201	+ 15	·92
6	09	— ·024	4·13
·60	16	64	·63
4	22	·103	5·65
8	32	42	8·30
·70	42	59	11·83
2	60	67	15·43
4	76	58	10·58
6	90	43	8·20
8	98	24	6·88
·80	·304	06	·08
2	09	·086	5·59
4	13	66	·26
6	15	47	·05
8	17	27	4·88
·90	— ·318	— ·007	4·86

When y vanishes between $s = \cdot 52$ and $\cdot 56$, $\varphi = \pi - 12^\circ 6'$.

$$nT' = 258^\circ.$$

The stability was not worked out, but the orbit is obviously evenly unstable.

Family *A* of satellites continued. $C = 38.0$ Figure-of-eight orbit, $x_0 = 1.1305$.

The calculation of this orbit proved excessively troublesome, and the results given below are only obtained with sufficient accuracy to draw a good figure.

Two sets of curves were traced; in the first set I travelled in a positive direction, starting from points on the line *SJ* for which x_0 is greater than unity; in the second set I travelled in a negative direction, starting from points on the line *SJ* for which x_0 is less than unity. One member of each of these two families was finally selected, such that they might be approximately parts of a single orbit.

The first of these two orbits is found by interpolation between the two, namely $x_0 = 1.126$ and $x_0 = 1.134$.

(arc increasing)			(arc diminishing)		
<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>	<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>
0.00	+ .1305	+ .000	0.00	— .3225	— .000
4	27	.040	— .04	21	40
8	16	.078	8	16	80
.12	.098	.114	.12	07	.119
6	75	47	6	.294	56
.20	47	75	8	83	73
4	+ 14	97	.20	70	88
8	— .023	.211	1	61	93
.32	63	12	2	52	94
6	99	.196	3	42	92
.40	.128	68	4	34	85
4	50	34	5	29	77
8	67	.098	6	24	68
.52	81	61	7	21	59
6	90	+ 22	8	18	49
.60	97	— .017	— .30	— .214	— .129
4	.201	57			
8	05	96			
.72	— .210	— .135			

The period of the whole periodic orbit is given in round numbers by $nT = 299^\circ$.

The orbit is obviously very unstable, and the instability is doubtless of the even type.

FAMILIES *B* AND *C* OF SATELLITES.

$$C = 39.3$$

These are two orbits which nearly coalesce. It would have been more interesting to find the orbits for that critical value of C for which they exactly coalesce, but on account of the difficulty of the search I have only found two orbits nearly coalescent.

Four orbits were computed viz. $x_0 = 1.15, 1.16, 1.17, 1.18$; the values of $\varphi - \pi$ after a semi-circuit were found to be $-6'.5, +1'.5, +2'.8, -5'.4$.

If u_0, u_1, u_2, u_3 denote any functions connected respectively with the four orbits $x_0 = 1.15, 1.16, 1.17, 1.18$ it appears that the two orbits for which the value of $\varphi - \pi$ is exactly zero are given by

$$u_1 + .1188(u_0 - u_1) + .2127(u_1 - u_2) + .0394(u_3 - u_1),$$

and

$$u_2 + .0628(u_0 - u_2) + .3133(u_2 - u_1) + .3193(u_3 - u_2).$$

Putting the u 's equal to $1.15, 1.16, 1.17, 1.18$ we find $x_0 = 1.15747, x_0 = 1.17506$ for the two periodics.

The four computed orbits gave nT equal to $87^\circ 15', 87^\circ 52', 88^\circ 46', 89^\circ 51'$ respectively.

On applying the formulæ of interpolation to the values of $x - 1, y$ and nT I find the two periodics as follows: —

	orbit <i>B</i>		orbit <i>C</i>	
	$x - 1$	y	$x - 1$	y
.00	+ .15747	+ .00000	+ .17506	+ .00000
3	5499	2986	7257	2986
6	4756	5889	6512	5888
9	3526	8620	5270	8614
.12	1825	.11085	3539	.11058
5	.09675	3172	1348	3098
8	7136	4756	.08761	.4604
.21	.04299	.15717	.05893	.15462

Families *B* and *C* of satellites continued.

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>	$x - 1$	<i>y</i>
.24	+ .01317	+ .15962	+ .02902	+ .15616
7	— .01638	5475	— .00043	5082
.30	4398	4315	2807	3923
3	6845	2588	5279	2234
6	8902	0412	7384	0102
9	.10519	.07889	9053	.07615
.42	1658	5119	.10232	4860
5	2296	+ 2191	0877	+ 1936
.48	— .12418	— .00802	— .10961	— .01058

$$nT = 87^{\circ} 41'.$$

$$nT = 89^{\circ} 18'.$$

The semi-arc of the periodic orbit *B* is .47197, and that of *C* is .46941.

The fifth place of decimals in the coordinates has been given, although it is perhaps frequently inaccurate.

Stability of orbit *B*, $x_0 = 1.15747$, $C = 39.3$.

Comparison					
Computed ϕ Synthesis			Computed ϕ Synthesis		
a_0	2.887	2.879	a_8	7.427	7.418
a_2	.4.240	4.243	a_9	4.594	4.602
a_3	6.165	6.152	a_{10}	2.676	2.677
a_4	9.024	9.042	a_{12}	1.209	1.215
a_6	12.925	12.931			

$$\phi_0 = 6.393.$$

The harmonic expansion represents ϕ well.

The determinant Δ is negative, and $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = -.0612$.

The modulus is 1.415, and the instability is not great; $c = .156 \sqrt{-1}$.

The orbit is unstable.

Stability of orbit *C*, $x_0 = 1.17506$, $C = 39.3$.

Comparison					
Computed ϕ Synthesis			Computed ϕ Synthesis		
a_0	3.736	3.725	a_8	6.123	6.119
a_2	5.507	5.517	a_9	3.948	3.956
a_3	7.862	7.834	a_{10}	2.430	2.431
a_4	10.715	10.749	a_{12}	1.199	1.185
a_6	11.641	10.663			

$$\phi_0 = 6.489.$$

Families *B* and *C* of satellites continued.

The harmonic expansion represents ϕ well.

The determinant gives, $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = .0644, c = 2.163,$

$$2\pi\left(\frac{1}{2}c-1\right)=80^{\circ}57', nT-2\pi\left(\frac{1}{2}c-1\right)=30^{\circ}31', 2\pi\left(1-\frac{\frac{1}{2}c}{1+\frac{nT}{2\pi}}\right)=24^{\circ}27'.$$

The orbit is stable.

FAMILY *B* OF SATELLITES.

$$C = 39.0$$

$$x_0 = 1.1500.$$

<i>s</i>	<i>x</i> - 1	<i>y</i>	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .1500	+ .0000	0° 0'	.1500	0° 0'	2.975
4	.459	397	11° 50'	512	15° 13'	3.016
8	.337	777	23° 54'	546	30° 10'	.135
.12	.136	.1122	36° 34'	597	44° 39'	.340
6	.0862	.412	50° 29'	654	58° 36'	.611
.20	.523	.622	66° 27'	704	72° 8'	.876
4	+ .137	.723	84° 44'	.728	85° 27'	4.093
8	- .0260	.691	$\pi - 75^{\circ}30'$.711	$\pi - 81^{\circ}16'$.021
.32	.624	.529	57° 27'	.651	67° 48'	3.696
6	.928	.271	42° 13'	.574	53° 52'	.335
.40	.1159	.0946	29° 3'	.496	39° 13'	.174
4	.316	.579	17° 12'	.438	23° 45'	2.832
8	.395	+ .188	$\pi - 5^{\circ}28'$.408	$\pi - 7^{\circ}41'$.738
.52	- .1392	- .0212	$\pi + 5^{\circ}56'$.1408	$\pi + 8^{\circ}40'$	2.738
.4991		.0000	$\pi + 0^{\circ}1'$			

$$nT = 96^{\circ}56'.$$

Family *B* of satellites continued.

Stability of $x_0 = 1.1500, C = 39.0.$

			Comparison		
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	1.861	2.012	a_8	9.599	9.602
a_2	3.087	3.078	a_9	4.994	4.926
a_3	5.045	5.202	a_{10}	2.206	2.274
a_4	8.405	8.166	a_{12}	0.538	0.588
a_6	17.315	17.124			

$\phi_0 = 6.924.$

The harmonic expansion represents ϕ with fair accuracy.

The determinant Δ is negative, and $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = -.4019.$

The instability is of the even type, the modulus is 0.58 and c is $0.38 \sqrt{-1}.$ The orbit is therefore very unstable.

$C = 38.5$ $x_0 = 1.1497.$

The comparison of the orbits $x_0 = 1.1500$ with a neighbouring orbit showed that the exactly periodic orbit would correspond with $x_0 = 1.1497,$ but the results here given will be sufficiently exact.

s	$x - 1$	y	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .1500	+ .0000	0° 0'	.1500	0° 0'	2.835
4	464	398	10° 24'	517	15° 12'	.880
8	356	782	20° 50'	566	29° 59'	3.020
.12	181	.1141	31° 27'	643	44° 1'	.264
6	.0941	460	42° 46'	737	57° 12'	.626
.20	639	721	55° 52'	837	69° 38'	4.119
4	+ .282	897	72° 23'	919	81° 33'	.668
8	- .0113	950	$\pi - 86° 53'$	953	$\pi - 86° 41'$.972
.32	500	854	65° 19'	920	74° 54'	.708
.36	- .0831	+ .1631	$\pi - 48° 18'$.1830	63° 0'	4.106

Family *B* of satellites continued.

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
40	— .1095	+ .1333	$\pi - 35^\circ 24'$.1725	$\pi - 50^\circ 36'$	3.574
4	.294	.0987	$24^\circ 28'$.628	$37^\circ 20'$.191
8	.427	.610	$14^\circ 36'$.552	$23^\circ 9'$	2.946
.52	.495	+ .217	$\pi - 5^\circ 2'$.511	$\pi - 8^\circ 16'$.826
.56	— .1498	— .0183	$\pi + 4^\circ 25'$.1509	$\pi + 6^\circ 58'$	2.821
.5418		.0000	$\pi + 0^\circ 4'$			

$$nT = 113^\circ 20'.$$

Stability of $x_0 = 1.1497$, $C = 38.5$.

The values of ϕ were computed for $x_0 = 1.1500$, and were corrected by interpolation with values computed for $x_0 = 1.1475$, but the corrections were so small that they might have been omitted.

Comparison					
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	0.68	1.15	a_8	11.79	11.97
a_2	1.83	1.81	a_9	4.53	4.29
a_3	3.77	4.18	a_{10}	1.21	1.34
a_4	8.03	7.39	a_{12}	— 0.82	— 0.90
a_6	29.34	28.97			

$$\phi_0 = 8.60.$$

The representation of ϕ by the harmonic series is fairly good.

The determinant is negative, and $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = -1.815$.

The orbit is very unstable with even instability; the modulus is .313 and $c = .70 \sqrt{-1}$.

Family *B* of satellites continued.

$C = 38.0$

$x_0 = 1.1470.$

<i>s</i>	<i>x</i> — 1	<i>y</i>	<i>φ</i>	<i>ρ</i>	<i>ψ</i>	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .1470	+ .0000	0° 0'	.1470	0° 0'	2.660
4	437	398	9° 26'	491	15° 29'	.706
8	340	786	18° 40'	553	30° 23'	.850
.12	183	.1153	27° 39'	652	44° 17'	3.106
6	.0970	492	36° 36'	779	56° 58'	.497
.20	706	791	46° 19'	926	68° 29'	4.089
2	556	922	51° 58'	.2001	73° 54'	.482
4	391	.2036	58° 41'	073	79° 8'	.957
6	213	128	67° 4'	139	84° 16'	5.504
8	+ 023	189	77° 46'	189	89° 23'	6.042
.30	— .0175	209	π — 89° 7'	216	π — 85° 28'	.397
2	373	182	74° 56'	213	80° 18'	.353
4	558	108	62° 3'	181	75° 10'	5.932
6	735	.1998	51° 53'	126	70° 3'	.352
8	873	864	44° 6'	059	64° 53'	4.805
.40	.1004	713	37° 55'	.1986	59° 37'	.336
4	221	378	28° 22'	841	48° 28'	3.653
8	385	014	20° 7'	717	36° 13'	.214
.52	496	.0630	12° 19'	624	22° 51'	2.944
.56	.1555	+ .0235	π — 4° 30'	.1573	π — 8° 36'	2.814
.5836	— .1564	.0000	π — 0° 8'			

$$nT = 131^{\circ}45'.$$

The final value of φ changes rapidly with the initial value of x , and therefore this is a very close approximation to the periodic orbit.

Stability of $x_0 = 1.1470, C = 38.0.$

Comparison				
Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0 — 0.402	2.265		a_8 12.358	13.083
a_2 0.670	— 0.363		a_9 3.160	1.931
a_3 2.899	5.403		a_{10} — 0.241	1.439
a_4 6.413	2.487		a_{12} — 2.174	2.271
a_6 59.339	56.777			

$$\phi_0 = 12.237.$$

Family *B* of satellites continued.

The representation of ϕ by the harmonic series is poor, but it will suffice to give some idea of the degree of instability.

The determinant is negative, and $-\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = 4.55$.

The orbit is very unstable, with even instability; the modulus is about .23 and $c = .96 \sqrt{-1}$.

FAMILY *C* OF SATELLITES.

$$C = 39.0$$

$$x_0 = 1.2338.$$

The periodic orbit was found by interpolation between $x_0 = 1.230$ and $x_0 = 1.235$, by the formula $.24 [x_0 = 1.230] + .76 [x_0 = 1.235]$. The following are the two computations,

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{l}$
.00	+ .2300	+ .0000	0° 0'	.2300	0° 0'	6.210
4	.258	397	12° 10'	.293	9° 59'	.250
8	.128	774	25° 50'	.265	19° 59'	.302
.12	.1905	.1105	42° 5'	.202	30° 6'	.180
6	.594	354	60° 24'	.092	40° 21'	5.670
.20	.221	.494	77° 56'	.1929	50° 45'	4.833
4	.0824	.526	$\pi - 87^\circ 10'$.735	61° 38'	3.061
8	.430	.461	74° 5'	.523	73° 36'	.223
.32	+ .060	.311	61° 52'	.312	87° 23'	2.652
6	-.0269	.085	49° 14'	.118	$\pi - 76^\circ 4'$.221
.40	.538	.0790	35° 13'	.0956	55° 46'	1.014
4	.721	.436	19° 19'	.843	31° 11'	.710
8	.795	+ .045	$\pi - 1^\circ 44'$.795	$\pi - 3^\circ 14'$.643
.52	-.0745	-.0351	$\pi + 16^\circ 6'$.0823	$\pi + 25^\circ 12'$	1.687
.4846		.0000	$\pi + 0^\circ 19'$			

$$nT = 112^\circ 26'.$$

Family C of satellites continued.

<i>s</i>	<i>x</i> — 1	<i>y</i>	<i>φ</i>	<i>ρ</i>	<i>ψ</i>	$\frac{2n}{V}$
·00	+ ·2350	+ ·0000	0° 0'	·2350	0° 0'	6·594
4	306	397	12° 31'	340	9° 46'	·616
8	173	773	26° 41'	307	19° 35'	·640
·12	·1944	·1099	43° 32'	233	29° 30'	·434
6	627	340	62° 8'	108	39° 29'	5·780
·20	249	470	79° 9'	·1928	49° 39'	4·805
4	·0851	495	π — 86° 43'	720	60° 21'	3·888
8	458	428	74° 15'	500	72° 13'	·147
·32	+ 087	281	62° 21'	284	86° 7'	2·581
6	— ·0244	059	49° 46'	087	π — 77° 2'	·161
·40	516	·0766	35° 34'	·0945	56° 3'	1·859
4	700	413	19° 10'	813	30° 32'	·670
8	771	+ 021	π — 1° 3'	771	π — 1° 31'	·603
·52	— ·0715	— ·0374	π + 17° 10'	·0807	π + 27° 37'	1·661
·4821		·0000.	π — 0° 6'			

$nT = 114^{\circ} 4'.$

The interpolated coordinates for the periodic orbit are

<i>x</i> — 1	<i>y</i>
·2338	+ ·0000
294	397
162	773
·1935	·1100
619	343
242	476
·0845	502
451	436
+ 081	288
— ·0250	065
521	·0772
705	418
777	+ 026
— ·0722	— ·0369

$nT = 113^{\circ} 41'.$

The arcs with which these orbits are computed are rather longer than is desirable, nor was quite sufficient pains taken to make the second ap-

Family C of satellites continued.

proximations satisfactory. Thus the order of accuracy attained is not very high. It seemed however to be sufficient for the purpose.

Stability of $x_0 = 1.2338$, $C = 39.0$.

The values of ϕ and of the determinant were computed for the two orbits between which the periodic orbit lies; the following are the results:—

$$x_0 = 1.230.$$

		Comparison			
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	5.40	5.57	a_8	4.47	4.58
a_2	10.65	10.71	a_9	3.06	3.04
a_3	16.30	16.40	a_{10}	1.93	1.99
a_4	18.44	18.38	a_{12}	0.47	0.47
a_6	9.69	9.70			

$$\phi_0 = 8.065.$$

The determinant gives $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = 421$, $c = 2.450$,

$$2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 80^\circ 57', nT - 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 31^\circ 29', 2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right) = 23^\circ 59'.$$

$$x_0 = 1.235.$$

		Comparison			
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	6.04	6.20	a_8	4.26	4.27
a_2	11.94	12.00	a_9	2.98	2.95
a_3	17.77	17.81	a_{10}	1.88	1.89
a_4	18.65	18.55	a_{12}	0.43	0.42
a_6	9.13	9.04			

$$\phi_0 = 8.176.$$

The determinant gives $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = 439$, $c = 2.462$,

$$2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 83^\circ 10', nT - 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 30^\circ 54', 2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right) = 23^\circ 28'.$$

Family *C* of satellites continued.

By interpolation between these two for $x_0 = 1.2338$,

$$\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = .435, c = 2.459, 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 82^\circ 38',$$

$$nT - 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 31^\circ 2', 2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right) = 23^\circ 35'.$$

The orbit is stable.

$C = 38.75$

$x_0 = 1.28733.$

s	$x - 1$	y	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .28733	+ .00000	0° 0'	.28733	0° 0'	10.472
2	8693	1999	2° 18'	8763	3° 59'	.610
4	8568	3995	4° 55'	8846	7° 58'	11.044
6	8340	5982	8° 24'	8964	11° 55'	.862
7	8174	6968	10° 46'	9023	13° 53'	12.471
8	7962	7945	13° 54'	9069	15° 52'	13.239
9	7688	8906	18° 8'	9085	17° 50'	14.168
.10	7330	9839	24° 14'	9047	19° 48'	15.216
1	6856	10719	32° 51'	8916	21° 46'	16.241
2	6237	1502	44° 17'	8647	23° 41'	.623
3	5465	2136	57° 2'	8210	25° 29'	15.899
4	4576	2590	68° 19'	7615	27° 8'	14.171
5	3621	2887	76° 31'	6907	28° 37'	12.217
6	2638	3068	82° 9'	6140	30° 0'	10.533
7	1644	3168	86° 8'	5335	31° 19'	9.156
8	0645	3210	89° 0'	4509	32° 37'	8.048
.20	.18648	3172	$\pi - 87^\circ 1'$	2830	35° 14'	6.421
2	6655	3018	84° 11'	1138	38° 1'	5.289
4	4670	2774	81° 47'	19453	41° 3'	4.457
6	2697	2448	79° 27'	7781	44° 26'	3.815
8	0739	2040	76° 59'	6133	48° 16'	.302
.30	.08802	1544	74° 14'	4517	52° 41'	2.881
2	6893	0949	71° 4'	2938	57° 49'	.527
4	5023	0241	67° 22'	1406	63° 53'	.225
.36	.03208	.09403	$\pi - 62^\circ 56'$.09935	71° 10'	1.962

Family *C* of satellites continued.

<i>s</i>	<i>r</i> = 1	<i>l</i>	<i>φ</i>	<i>ρ</i>	<i>ψ</i>	$\frac{2n}{V}$
38	+ .01471	+ .08413	$\pi - 57^{\circ} 34'$.08541	$80^{\circ} 5'$	1.731
40	- .00154	7248	$50^{\circ} 56'$	7250	$\pi - 88^{\circ} 47'$.528
2	1614	5884	$42^{\circ} 39'$	6101	$74^{\circ} 40'$.353
4	2833	4303	$32^{\circ} 13'$	5152	$56^{\circ} 38'$.209
5	3321	3431	$26^{\circ} 5'$	4774	$45^{\circ} 56'$.152
6	3707	2509	$19^{\circ} 20'$	4477	$34^{\circ} 5'$.106
7	3978	1547	$12^{\circ} 3'$	4269	$21^{\circ} 15'$.074
8	4122	0558	$4^{\circ} 24'$	4159	$\pi - 7^{\circ} 43'$.057
.485	- .04143	+ .00059	$\pi - 0^{\circ} 30'$.04143		1.054
.48559		.00000	$\pi - 0^{\circ} 2'$			

$$nT = 179^{\circ} 31'.$$

Stability of $x_0 = 1.28733$, $C = 38.75$.

Comparison			
	Computed ϕ	Synthesis	
a_0	- 4.38	8.08	a_8 3.42 - 9.75
a_2	18.34	43.45	a_9 3.08 11.03
a_3	185.33	155.74	a_{10} 2.57 0.49
a_4	46.39	79.81	a_{12} - 3.08 8.88
a_6	6.22	15.65	

$$\phi_0 = 23.02.$$

The representation of ϕ by the harmonic series is bad, but it may serve to give some idea of the degree of instability.

The determinant gives $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = 1.946$.

The instability is uneven; $c = 1 + .55\sqrt{-1}$; modulus = .40.

Family *C* of satellites continued.

$C = 38.5$

$x_0 = 1.2760.$

<i>s</i>	$x - 1$	<i>l</i>	φ	ρ	ϕ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .2760	+ .0000	0° 0'	.2760	0° 0'	7.516
2	759	200	0° 34'	766	4° 9'	.590
4	756	400	1° 3'	785	8° 15'	.829
6	752	600	1° 25'	816	12° 18'	8.258
8	746	800	1° 34'	861	16° 14'	.984
.10	741	.1000	1° 27'	918	20° 2'	10.212
2	737	200	1° 2'	988	23° 40'	12.467
3	735	300	0° 49'	.3028	25° 25'	14.561
4	734	400	1° 2'	071	27° 7'	18.411
45	732	450	1° 47'	093	27° 57'	22.00
5	730	500	4° 32'	115	28° 47'	29.20
525	727	524	8° 27'	124	29° 12'	36.46
55	721	549	21° 17'	131	29° 39'	53.80
5625	715	560	38° 47'	131	29° 52'	67.34
5750	705	567	72° 47'	126	30° 5'	81.66
5875	693	567	$\pi - 71° 23'$	115	30° 11'	62.13
6000	681	561	63° 45'	103	30° 12'	46.22
6125	671	555	58° 52'	090	30° 13'	37.74
6250	660	549	56° 23'	078	30° 12'	32.84
650	640	534	54° 39'	053	30° 10'	26.41
675	619	520	54° 4'	028	30° 7'	22.50
70	599	505	54° 2'	005	30° 7'	20.315
75	558	476	54° 53'	.2954	29° 59'	16.355
80	517	448	56° 8'	904	29° 54'	14.083
9	433	394	58° 59'	804	29° 49'	11.217
.20	346	344	61° 29'	704	29° 49'	9.406
2	167	256	65° 50'	505	30° 6'	7.150
4	.1982	179	69° 0'	306	30° 46'	5.748
8	603	050	72° 42'	.1916	33° 14'	4.027
.32	220	.0936	73° 32'	537	37° 29'	2.974
6	.0838	818	71° 41'	171	44° 18'	.234
.40	464	677	66° 35'	.0821	55° 36'	1.611
2	283	591	62° 9'	655	64° 24'	.412
4	+ 112	488	55° 11'	500	77° 4'	.182
6	— .0041	360	44° 30'	362	$\pi - 83° 27'$	0.971
7	107	285	36° 53'	304	69° 25'	.876
.48	— .0160	.0200	$\pi - 27° 7'$.0256	$\pi - 51° 20'$	0.795

Family *C* of satellites continued.

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.49	— .0196	.0107	$\pi - 14^\circ 56'$.0223	$\pi - 28^\circ 36'$.737
.50	210	+ .008	$\pi - 0^\circ 51'$	210	$\pi - 2^\circ 14'$.713
.51	— .0199	— .0091	$\pi + 13^\circ 29'$.0219	$\pi + 24^\circ 33'$.729
.50084	— .02102	.0000	$\pi + 0^\circ 21'$			

$$nT = 210^\circ 52'.$$

A small change in x_0 makes a large change in the final value of φ , and it is therefore unnecessary to seek a more exact representation of the periodic orbit.

The stability was not computed, since the method would fail, but the orbit is obviously very unstable with uneven instability.

$$C = 38.0$$

$$x_0 = 1.2480.$$

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .2480	+ .0000	$0^\circ 0'$.2480	$0^\circ 0'$	5.047
4	475	400	$1^\circ 32'$	507	$9^\circ 11'$.176
8	460	800	$2^\circ 27'$	586	$18^\circ 1'$.591
.12	444	.1199	$+ 1^\circ 50'$	723	$26^\circ 9'$	6.479
6	444	599	$- 2^\circ 30'$	921	$33^\circ 12'$	8.470
8	461	798	$8^\circ 1'$.3048	$36^\circ 10'$	10.593
.20	510	991	$22^\circ 22'$	204	$38^\circ 25'$	15.63
1	561	.2076	$41^\circ 49'$	297	$39^\circ 2'$	22.07
15	599	108	$60^\circ 44'$	345	$39^\circ 1'$	25.62
2	646	122	$- 87^\circ 11'$	389	$38^\circ 44'$	27.81
25	695	113	$\pi + 65^\circ 34'$	424	$38^\circ 6'$	26.60
3	736	084	$46^\circ 34'$	440	$37^\circ 18'$	22.64
35	768	046	$34^\circ 36'$	442	$36^\circ 28'$	19.60
4	793	003	$25^\circ 52'$	437	$35^\circ 38'$	17.03
5	827	.1908	$\pi + 14^\circ 12'$	410	$34^\circ 2'$	14.16
7	847	708	$\pi - 0^\circ 26'$	320	$30^\circ 58'$	11.02
.29	.2824	.1512	$\pi - 13^\circ 15'$.3204	$28^\circ 9'$	9.286

Family *C* of satellites continued.

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>	φ	ρ	ψ	$\frac{2n}{V}$
31	2759	1323	$\pi - 24^\circ 36'$	3060	$25^\circ 37'$	8.070
3	660	150	$34^\circ 42'$	2898	$23^\circ 23'$	7.072
7	384	0862	$51^\circ 48'$	535	$19^\circ 53'$	5.462
41	043	655	$64^\circ 26'$	145	$17^\circ 46'$	4.197
5	1670	512	$73^\circ 2'$	1747	$16^\circ 50'$	3.218
9	282	416	$78^\circ 16'$	348	$17^\circ 58'$	2.452
53	0889	343	$80^\circ 14'$	0953	$21^\circ 6'$	1.824
5	692	309	$79^\circ 56'$	758	$24^\circ 4'$.541
7	495	271	$78^\circ 21'$	565	$28^\circ 45'$.266
8	398	250	$76^\circ 52'$	470	$32^\circ 9'$.127
9	301	226	$74^\circ 39'$	376	$36^\circ 56'$	0.986
60	205	196	$71^\circ 11'$	284	$43^\circ 45'$.839
1	112	160	$65^\circ 24'$	195	$55^\circ 0'$.682
2	+ 026	110	$54^\circ 0'$	113	$76^\circ 57'$.510
25	- 0012	077	$42^\circ 46'$	0783	$\pi - 81^\circ 6'$.420
30	039	036	$23^\circ 4'$	0535	$42^\circ 22'$.347
325	- 0047	+ 0012	$\pi - 9^\circ 0'$	00481	$\pi - 14^\circ 32'$	0.328
63371	- 0048	0000	$\pi - 1^\circ 37'$	00478	$\pi - 0^\circ 0'$	0.327

$$nT = 235^\circ 17'.$$

This orbit was not computed with high accuracy. As far as can be judged from other computations, the exactly periodic orbit would correspond to $x_0 = 1.2465$, but the calculations from which this is inferred were not conducted with the closest accuracy.

A very small difference in the initial value of x makes a considerable change in the size of the loop described. It would be very laborious to obtain the exact periodic orbit for this value of C , and the above appears to suffice.

The orbit is obviously very unstable, with uneven instability.

FAMILY A OF PLANETS.

$$C = 40.0$$

$$x_0 = -.414.$$

s	x	y	φ	r	θ	$\frac{2\pi}{V}$
.0	-.4140	-.0000	$\pi + 0^\circ 0'$.414	$\pi + 0^\circ 0'$	1.809
.1	.032	.992	$12^\circ 22'$.152	$13^\circ 49'$.820
.2	.3715	.1938	$24^\circ 49'$.191	$27^\circ 34'$.851
.3	.199	.2793	$37^\circ 28'$.246	$41^\circ 7'$.899
.4	.2507	.3512	$50^\circ 24'$.314	$54^\circ 29'$.960
.5	.1670	.4055	$63^\circ 47'$.385	$67^\circ 38'$	2.030
.6	-.0728	.385	$\pi + 77^\circ 42'$.445	$\pi + 80^\circ 34'$.093
.7	+.0265	.474	$-87^\circ 53'$.482	$-86^\circ 37'$.135
.8	.1249	.309	$73^\circ 9'$.486	$73^\circ 50'$.141
.9	.2159	.3901	$58^\circ 34'$.459	$61^\circ 3'$.109
1.0	.939	.280	$44^\circ 27'$.405	$48^\circ 8'$.045
.1	.3549	.2490	$31^\circ 9'$.336	$35^\circ 4'$	1.067
.2	.969	.1585	$18^\circ 45'$.274	$21^\circ 46'$.807
.3	.4191	.0612	$7^\circ 5'$.235	$8^\circ 19'$.850
1.35	+.4228	-.0114	$-1^\circ 24'$.4229	$-1^\circ 32'$	1.848
1.3614	+.423	.000	$-0^\circ 6'$			

$$nT = 154^\circ 13'.$$

Although this is not strictly periodic, since the final value of φ is $-0^\circ 6'$, it is sufficiently nearly so to be accepted as such.

Stability of $x_0 = -.414$, $C = 40.0$.

Comparison					
Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis	
a_0	5.476	5.490	a_8	11.027	11.021
a_2	6.184	6.180	a_9	9.104	9.106
a_3	7.069	7.088	a_{10}	6.700	6.696
a_4	8.356	8.327	a_{12}	3.801	3.793
a_6	11.463	11.438			

$$\phi_0 = 8.051.$$

Family A of planets continued.

The harmonic series represents ϕ well. The determinant gives

$$\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = .9096, c = 2.806, 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 145^\circ 0',$$

$$nT - 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 9^\circ 13', 2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right) = 6^\circ 27'.$$

The orbit is stable.

$$C = 39.5$$

$$x_0 = -.4240.$$

The periodic orbit is found by interpolation between $x_0 = -.426$ and $x_0 = -.4$, by the formula $.92228 [x_0 = -.426] + .07772 [x_0 = -.4]$.

The following are the two computations:

s	x	y	φ	r	θ	$\frac{2n}{V}$
0.0	-.4260	-.0000	$\pi + 0^\circ 0'$.4260	$\pi + 0^\circ 0'$	1.861
.1	.157	.993	$11^\circ 52'$.275	$13^\circ 26'$.874
.2	.3851	.1943	$23^\circ 49'$.314	$26^\circ 46'$.905
.3	.354	.2809	$35^\circ 51'$.374	$39^\circ 57'$.959
.4	.2686	.3550	$48^\circ 18'$.451	$52^\circ 53'$	2.031
.5	.1871	.4127	$61^\circ 14'$.531	$65^\circ 37'$.111
.6	-.0947	.501	$74^\circ 45'$.600	$\pi + 78^\circ 8'$.189
.7	+.0041	.644	$\pi + 88^\circ 52'$.644	$-89^\circ 30'$.242
.8	.1032	.538	$-76^\circ 35'$.654	$77^\circ 11'$.256
.9	.965	.185	$62^\circ 5'$.624	$64^\circ 50'$.221
1.0	.2783	.3614	$48^\circ 6'$.560	$52^\circ 24'$.144
.1	.3443	.2866	$34^\circ 59'$.481	$39^\circ 47'$.052
.2	.924	.1991	$22^\circ 48'$.399	$26^\circ 54'$	1.962
.3	.4218	.037	$11^\circ 30'$.343	$13^\circ 49'$.900
1.4	+.4324	-.1044	$-0^\circ 43'$.4324	$-0^\circ 35'$	1.878
1.4044	+.4324	.0000	$-0^\circ 15'$			

$$nT = 165^\circ 0'.$$

Family A of planets continued.

s	x	y	φ	r	θ	$\frac{2n}{V}$
0	— .4000	— .0000	$\pi + 0^\circ 0'$.4000	$\pi + 0^\circ 0'$	1.686
1	.3899	993	$11^\circ 39'$.024	$14^\circ 17'$.701
2	.599	.1945	$23^\circ 20'$.091	$28^\circ 23'$.748
3	.111	.2817	$35^\circ 7'$.197	$42^\circ 9'$.825
4	.2455	.3570	$47^\circ 8'$.333	$55^\circ 29'$.934
5	.1654	.4165	$59^\circ 39'$.481	$68^\circ 20'$	2.067
6	— .0742	.568	$72^\circ 57'$.627	$\pi + 80^\circ 47'$.218
7	+ .0241	.740	$\pi + 87^\circ 19'$.746	— $87^\circ 6'$.354
8	.1234	.655	— $77^\circ 20'$.817	$75^\circ 9'$.448
9	.2167	.304	$61^\circ 22'$.819	$63^\circ 16'$.444
10	.970	.3712	$46^\circ 7'$.754	$51^\circ 20'$.348
1	.3598	.2937	$32^\circ 15'$.644	$39^\circ 13'$.204
2	.4035	.040	$19^\circ 51'$.522	$26^\circ 49'$.063
3	.278	.1072	— $8^\circ 33'$.410	$14^\circ 4'$	1.950
14	+ .4334	— .0075	+ $2^\circ 10'$.4335	— $1^\circ 0'$	1.887
14075	+ .4331	.0000	+ $2^\circ 58'$			

$$nT = 167^\circ 31'.$$

The interpolated coordinates for the periodic orbit are,

x	y
— .4240	— .0000
.137	.993
.3831	.1943
.335	.2810
.2668	.3552
.1854	.4130
— .0931	.506
+ .0057	.651
.1048	.547
.981	.194
.2798	.3622
.3455	.2872
.933	.1995
.4223	.040
+ .4325	— .0046

$$nT = 165^\circ 12'.$$

Family A of planets continued.

Stability of $x_0 = -.426$, $U = 39.5$.

The orbit $x_0 = -.426$ was treated for stability in place of the interpolated orbit $x_0 = -.424$.

			Comparison		
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	5.73	5.73	a_8	11.94	11.94
a_2	6.54	6.54	a_9	9.42	9.42
a_3	7.59	7.59	a_{10}	6.57	6.57
a_4	9.14	9.14	a_{12}	3.25	3.25
a_6	12.71	12.71			

$\phi_0 = 8.565.$

The harmonic series represents ϕ perfectly. The determinant gives

$\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = .976, c = 2.901, 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 162^\circ 15',$

$nT - 2\pi \left(\frac{1}{2} c - 1 \right) = 2^\circ 47', 2\pi \left(1 - \frac{\frac{1}{2} c}{1 + \frac{nT}{2\pi}} \right) = 1^\circ 52'.$

The orbit is stable, but approaches very near to instability.

The results would have been somewhat modified if we had operated on the true periodic orbit $x_0 = -.424$.

$U = 39.0$

$x_0 = -.434.$

(Computed with 3-figured logarithms and to tenths of degree).

s	x	y	φ	r	$\theta + nt$
0	-.434	-.000	$\pi + 0^\circ 0'$.434	$\pi + 0^\circ 0'$
.1	.24	.99	$11^\circ 18'$.36	$18^\circ 36'$
.2	.395	.195	$22^\circ 36'$.42	$37^\circ 12'$
.3	-.348	-.282	$\pi + 34^\circ 12'$.449	$\pi + 55^\circ 36'$

Family A of planets continued.

s	x	y	q	r	$\theta + n\ell$
4	— .284	— .350	$\pi + 46^{\circ} 0'$.457	$\pi + 74^{\circ} 6'$
5	.04	.420	$58^{\circ} 24'$.67	$— 87^{\circ} 24'$
6	.114	.65	$71^{\circ} 30'$.78	$68^{\circ} 54'$
7	— .016	.85	$\pi + 85^{\circ} 24'$.84	$52^{\circ} 24'$
8	$+ .083$.78	$— 80^{\circ} 0'$.85	$31^{\circ} 50'$
9	.179	.49	$65^{\circ} 24'$.83	$— 12^{\circ} 42'$
10	.264	.300	$51^{\circ} 12'$.76	$+ 5^{\circ} 54'$
11	.334	.25	$38^{\circ} 12'$.67	$24^{\circ} 24'$
12	.87	.241	$26^{\circ} 6'$.56	$42^{\circ} 42'$
13	.422	.148	$15^{\circ} 6'$.47	$61^{\circ} 6'$
14	.440	— .048	$— 4^{\circ} 48'$.43	$+ 79^{\circ} 56'$
1.45	$+ .442$	$+ .001$	$+ 0^{\circ} 12'$.442	
1.446		.000	$+ 0^{\circ} 6'$		

$$nT = 177^{\circ} 0'.$$

Stability of $x_0 = - .434$, $C = 39.0$.

Comparison					
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
α_0	5.480	5.434	α_5	13.595	13.609
α_2	6.507	6.527	α_7	10.271	10.247
α_8	7.442	7.529	α_{11}	6.507	6.527
α_4	9.721	9.637	α_{12}	2.627	2.638
α_6	14.870	14.828			

$$\phi_0 = 9.156.$$

The harmonic expansion represents ϕ well.

The determinant Δ is positive and $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ is 1.027, and $c = 3 + .10\sqrt{-1}$.

The modulus of instability is 2.1.

The orbit is unstable, with uneven instability, but the instability is slight.

Family *A* of planets continued.

$C = 38.5$

$x_0 = -.4440.$

<i>s</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	φ	<i>r</i>	θ	$\frac{2n}{V}$
.00	— .4440	— .0000	$\pi + 0^\circ 0'$.4440	$\pi + 0^\circ 0'$	1.916
.08	.380	.797	$8^\circ 33'$.452	$10^\circ 19'$.925
.16	.203	.1576	$17^\circ 8'$.489	$20^\circ 33'$.955
.24	.3911	.2320	$25^\circ 47'$.547	$30^\circ 41'$	2.004
.32	.509	.3011	$34^\circ 34'$.624	$40^\circ 38'$.071
.40	.006	.632	$43^\circ 35'$.714	$50^\circ 23'$.157
.8	.2410	.4164	$52^\circ 57'$.811	$59^\circ 57'$.258
.56	.1733	.589	$62^\circ 48'$.906	$69^\circ 19'$.368
.64	.0993	.889	$73^\circ 15'$.989	$78^\circ 31'$.474
.72	— .0210	.5045	$\pi + 84^\circ 22'$.5049	$\pi + 87^\circ 37'$.560
.80	.589	.043	$-83^\circ 58'$.977	$-83^\circ 20'$.605
.8	.1370	.4877	$72^\circ 5'$.066	$74^\circ 18'$.592
.96	.2101	.555	$60^\circ 26'$.016	$65^\circ 14'$.523
1.04	.755	.095	$49^\circ 25'$.4935	$56^\circ 4'$.413
.12	.3312	.3523	$39^\circ 14'$.835	$46^\circ 46'$.286
.20	.765	.2864	$29^\circ 54'$.730	$37^\circ 16'$.163
.8	.4109	.143	$21^\circ 15'$.634	$27^\circ 33'$.058
.36	.345	.1379	$13^\circ 13'$.559	$17^\circ 37'$	1.980
.44	.475	— .0591	$-5^\circ 36'$.514	$-7^\circ 31'$.935
1.52	— .4502	+ .0208	$+ 1^\circ 49'$.4507	$+ 2^\circ 39'$	1.927
1.4992		.0000	$- 0^\circ 6'$			

$nT = 191^\circ 21'.$

Stability of $x_0 = -.4440$, $C = 38.5$.

After the computation of the stability had been completed a small mistake in the calculation of the orbit was detected in consequence of which the semi-arc of the periodic orbit was taken to be 1.4987 (instead of 1.4992 as above); it was not however thought to be worth while to recompute the stability.

Family *A* of planets continued.

			Comparison		
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	5.084	5.084	a_8	15.319	15.346
a_2	6.174	6.155	a_9	10.517	10.516
a_3	7.695	7.724	a_{10}	6.157	6.121
a_4	10.183	10.160	a_{12}	2.029	1.952
a_6	17.402	17.418			

$$\phi_0 = 9.786.$$

The harmonic series represents ϕ well.

The determinant Δ is positive and $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = 1.078$, and $c = 3 + .176 \sqrt{-1}$.

The modulus is 1.25. The orbit is unstable, with uneven instability, but the instability is not great.

$$C = 38.0$$

$$x_0 = -.455.$$

s	x	y	ϕ	r	θ	$\frac{2n}{V}$
.00	-.4550	-.0000	$\pi + 0^\circ 0'$.4550	$\pi + 0^\circ 0'$	1.954
.08	.494	.0797	$8^\circ 4'$.563	$10^\circ 4'$	1.964
.16	.326	.1579	$16^\circ 10'$.606	$20^\circ 3'$	2.000
.24	.050	.2329	$24^\circ 19'$.672	$29^\circ 54'$.056
.32	.3669	.3032	$32^\circ 35'$.760	$39^\circ 34'$.133
.40	.190	.3672	$41^\circ 4'$.864	$49^\circ 1'$.234
.8	.2621	.4233	$49^\circ 50'$.978	$58^\circ 14'$.354
.56	.1970	.4697	$59^\circ 14'$.5092	$67^\circ 14'$.496
.64	.251	.5044	$69^\circ 18'$.193	$76^\circ 4'$.631
.72	-.0480	.5255	$\pi + 80^\circ 15'$.282	$\pi + 84^\circ 47'$.770
.80	+.0316	.5310	$-87^\circ 58'$.310	$-86^\circ 35'$.825
.88	.1107	.5197	$75^\circ 48'$.316	$77^\circ 59'$.841
.96	.856	.4921	$63^\circ 47'$.259	$69^\circ 20'$.753
1.04	+.2535	-.4498	$-52^\circ 34'$.5164	$-60^\circ 36'$	2.611

Family *A* of planets continued.

<i>s</i>	α	η	φ	<i>r</i>	θ	$\frac{2n}{V}$
1.12	.3122	.3957	— 42° 15'	.5042	— 51° 44'	2.445
1.20	.611	.3324	33° 7'	.4908	42° 38'	.281
8	.3996	.2624	24° 43'	.730	33° 17'	.140
.36	.4280	.1877	16° 58'	.673	23° 41'	.031
.44	.464	.1099	9° 39'	.597	13° 50'	1.958
.52	.550	— .0304	— 2° 45'	.561	— 4° 0'	.921
1.60	+ .4540	+ .0495	+ 4° 6'	.4567	+ 6° 14'	1.929
1.5505		.0000	— 0° 8'			

$$nT = 207^\circ 9'.$$

Stability of $x_0 = -.455$, $C = 38.0$.

Comparison					
	Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis
a_0	4.722	4.886	a_8	17.052	17.170
a_2	5.941	5.927	a_9	10.602	10.491
a_3	7.767	7.821	a_{10}	5.618	5.649
a_4	10.991	10.898	a_{12}	0.952	0.990
a_6	21.495	21.508			

$$\phi_0 = 10.666.$$

The representation of ϕ by the harmonic series is good.

The determinant Δ is positive, and $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0}$ is 1.095.

The orbit is unstable and the instability is of the uneven type.

The modulus of instability is 1.14, and $c = 1 + .193 \sqrt{-1}$.

FAMILY a OF OSCILLATING SATELLITES.

$$C = 40.0$$

$$x_0 = .705.$$

s	x	y	φ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ 7050	+ .0000	— 0° 0'	14.622
1	053	100	3° 12'	.867
2	061	200	6° 43'	15.674
3	077	298	11° 3'	17.354
4	101	395	17° 30'	20.872
5	118	442	22° 44'	24.319
45	141	487	31° 8'	31.098
525	155	507	40° 55'	37.31
550	174	524	57° 32'	47.14
5625	185	529	— 71° 59'	54.71
5750	197	531	$\pi + 88° 27'$	55.66
5875	210	529	69° 30'	54.34
6000	220	523	54° 9'	47.14
6125	230	514	44° 29'	41.87
6250	238	505	37° 8'	37.50
6375	245	495	31° 59'	33.98
6500	251	484	28° 7'	30.28
675	262	461	22° 43'	26.92
700	271	438	18° 55'	24.14
75	285	390	13° 17'	20.59
80	295	341	10° 9'	18.47
85	303	292	7° 55'	16.99
90	309	242	6° 10'	.027
95	313	192	4° 43'	15.335
.100	317	142	3° 27'	14.810
05	319	093	2° 20'	.516
10	321	+ 043	1° 18'	.329
.115	+ .7322	— .0007	$\pi + 0° 18'$	14.276
.11427		.0000	$\pi + 0° 27'$	

$$nT = 138° 20'.$$

Family α of oscillating satellites continued.Stability of $x_0 = .705$, $C = 40.0$.

The thirteen equidistant values of ϕ show great irregularity. The values numbered 0, 1, 2, 3, 4 and 8, 9, 10, 11, 12 are all negative and lie between -2.6 and -3.0 ; the values numbered 5 and 7 are about $+8$, and the value numbered 6 is about $+800$.

The harmonic analysis led to results which showed that the representation of ϕ by the series would be so bad that it would not be worth while to continue the calculation.

The orbit is obviously very unstable.

 $C = 39.0$ $x_0 = .6871$.

The coordinates for the periodic orbit were derived from the following by interpolation, as explained below.

s	x	y	ϕ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .6870	+ .0000	— $0^\circ 0'$	5.773
4	.890	.399	$5^\circ 44'$	6.008
8	.954	.794	$12^\circ 58'$.893
.10	.7007	.987	$18^\circ 4'$	7.834
1	.040	.1081	$21^\circ 29'$	8.570
2	.080	.172	$25^\circ 58'$	9.634
3	.129	.260	$32^\circ 31'$	11.293
35	.157	.301	$37^\circ 14'$	12.511
40	.190	.339	$43^\circ 46'$	14.174
45	.227	.372	$53^\circ 38'$	16.688
475	.248	.386	$60^\circ 40'$	18.12
500	.271	.396	$69^\circ 41'$	19.72
525	.295	.403	— $81^\circ 8'$	21.26
550	.320	.404	$\pi + 85^\circ 19'$.96
575	.344	.399	$71^\circ 19'$.62
.1600	.7367	.1388	$\pi + 58^\circ 48'$	20.36

Family α of oscillating satellites continued.

s	x	y	φ	$\frac{2n}{V}$
.1625	+ .7387	+ .1373	$\pi + 48^\circ 46'$	18.66
.650	.404	.355	$41^\circ 4'$	17.04
.675	.420	.336	$35^\circ 6'$	15.64
.70	.433	.315	$30^\circ 25'$	14.45
.75	.456	.270	$23^\circ 37'$	12.58
.80	.474	.224	$18^\circ 59'$	11.243
.85	.488	.176	$15^\circ 26'$	10.235
.90	.501	.127	$12^\circ 47'$	9.467
.20	.519	.029	$9^\circ 1'$	8.350
.1	.533	.0930	$6^\circ 22'$	7.584
.2	.542	.830	$4^\circ 25'$.027
.4	.553	.631	$1^\circ 54'$	6.294
.6	.556	.431	$\pi + 0^\circ 11'$	5.875
.8	.555	.231	$\pi - 1^\circ 7'$.653
.30	.549	+ .031	$2^\circ 18'$.585
.32	+ .7538	- .0160	$\pi - 3^\circ 37'$	5.656
.3031		.0000	$\pi - 2^\circ 23'$	

$$nT = 146^\circ 36'.$$

The following are coordinates interpolated between the preceding and the loop of the figure-of-8 $x_0 = 1.0941$, in such a way as to give a periodic orbit:—

s	x	y
.00	+ .6871	+ .0000
.4	.802	.400
.8	.956	.795
.10	.7010	.087
.1	.045	.1081
.2	.085	.172
.3	.135	.250
.35	.164	.300
.4	.196	.337
.475	.252	.381
.55	.322	.399
.6	.368	.386
.165	+ .7407	+ .1355

Family *a* of oscillating satellites continued.

<i>s</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
17	+ 7437	+ 1316
75	461	273
8	481	227
85	497	180
9	510	142
20	534	027
1	549	0929
4	573	645
6	583	446
8	587	246
30	+ 7588	+ 0047

$nT = 145^{\circ} 40'.$

Stability of $x_0 = .6870, C = 39.0.$

In order to try the determinantal process on one orbit which is obviously very unstable, I treated the first of the above as though it were periodic with the following results: —

Comparison					
Computed ϕ	Synthesis		Computed ϕ	Synthesis	
a_0	— 2.7	+ 38.6	a_7	+ 18.2
a_1	— 2.7	a_8	— 2.2	+ 87.0
a_2	— 2.9	— 3.2	a_9	— 3.3	+ 34.7
a_3	— 2.9	+ 38.3	a_{10}	— 3.3	+ 2.6
a_4	— 2.4	+ 82.9	a_{11}	— 3.3
a_5	+ 3.7	a_{12}	— 3.3	+ 35.8
a_6	+ 498.9	+ 379.5			

$\phi_0 = 41.2.$

The function ϕ is obviously one which would require a very large number of terms of an harmonic series for adequate representation, and the above is very bad.

However with 17 rows I find $\Delta \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\phi_0} = -148.4; c = 2.0 \sqrt{-1},$
modulus = .11.

I think it is certain that the instability is of the even type, and is very great.

Family α of oscillating satellites continued.

$$C = 38.5$$

$$x_0 = .6814.$$

Two orbits were computed, namely $x_0 = .6817$, giving the final value of φ equal to $\pi + 5^\circ 11'$ and $nT = 147^\circ 46'$, and $.6810$, giving final $\varphi = \pi - 6^\circ 26'$ and $nT = 151^\circ 53'$. The arcs in the latter orbit were shorter than in the former throughout a portion of the curve. Interpolation between these two by the formula $.446(x_0 = .6810) + .554(x_0 = .6817)$ gives the following results: —

s	x	y	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .6814	+ .0000	4.85
4	831	400	.98
8	884	796	5.44
.12	982	.1183	6.53
4	.7055	369	7.62
6	153	543	9.70
7	.217	620	11.63
8	295	675	14.46
9	390	699	17.44
.20	482	662	15.27
1	543	581	11.69
2	584	491	9.61
3	615	396	8.28
4	637	299	7.36
6	666	102	6.22
8	682	.0903	.50
.30	691	703	5.07
2	695	504	4.79
4	698	304	.61
6	698	+ 105	.52
.38	+ .7698	— .0094	4.52
.37054	.7698	.0000	

$$nT = 149^\circ 36'.$$

The orbit is obviously unstable, and the instability is of the even type.

Family *a* of oscillating satellites continued.

$$C = 38.0$$

$$x_0 = .676.$$

This orbit was exceedingly troublesome, and the coordinates were found by several interpolations amongst the same orbits as those used in finding the figure-of-8 orbit $x_0 = 1.1305$. Two sets of curves were traced; in the first set I started from one side of the oval, and in the second from the other side. The two curves were so selected that they might join one another as nearly as may be. The period of this orbit was not determined.

(arc increasing)		(arc diminishing)	
<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
+ .676	+ .000	+ .778	— .009
77	40	78	+ .011
82	80	79	31
90	119	79	51
704	56	79	71
13	74	78	111
19	82	77	31
26	90	+ .774	+ .151
34	95		
43	98		
53	96		
60	89		
65	80		
68	71		
71	61		
73	51		
+ .774	+ .141		

nT undetermined.

FAMILY *b* OF OSCILLATING SATELLITES.

$$C = 38.5$$

$$x_0 = 1.2919.$$

The following was computed, —

<i>s</i>	<i>x</i> — 1	<i>y</i>	φ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .29215	+ .0000	— 0° 0'	8.52
4	932	400	2° 54'	9.00
8	971	797	9° 14'	10.84
.10	.3014	993	16° 10'	13.02
1	046	.1087	21° 56'	14.70
2	091	177	31° 49'	17.19
25	120	217	39° 5'	19.54
30	155	254	48° 21'	20.60
35	195	283	59° 56'	22.21
40	241	303	73° 40'	23.21
45	290	311	— 87° 38'	.00
50	340	307	$\pi + 79° 36'$	21.83
55	388	293	69° 0'	20.27
60	433	272	60° 51'	18.70
65	475	245	54° 15'	17.32
70	514	214	48° 59'	16.21
8	584	143	40° 54'	14.40
9	645	064	34° 51'	13.09
.20	699	.0980	30° 5'	12.15
2	787	801	22° 20'	10.89
4	853	612	16° 22'	.12
6	900	418	11° 13'	9.63
8	931	220	6° 28'	.36
.30	+ .3945	+ .0021	$\pi + 1° 55'$	9.25
.30209		.0000	$\pi + 1° 27'$	

$$nT = 213.52'.$$

Family *b* of oscillating satellites continued.

The above, not being exactly periodic, was corrected by extrapolation from the orbit $x_0 = 1.295$, which gave $\pi + 7^\circ 58'$ as the final value of ζ . The corrected coordinates are,

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>
.00	+ .2919	+ .0000
4	929	400
8	968	797
.10	.3009	993
1	041	.1088
2	085	178
25	113	219
3	147	256
35	187	286
4	233	306
45	282	314
5	332	311
55	380	297
6	425	275
7	505	216
8	575	145
9	635	065
.20	687	.0979
2	772	799
4	835	609
6	879	413
8	905	214
.30	+ .3915	+ .0014

Family *b* of oscillating satellites continued.

$$C = 38.0$$

$$x_0 = 1.25945.$$

The following orbit was computed,

<i>s</i>	<i>x</i> — 1	<i>y</i>	φ	$\frac{2n}{V}$
.00	+ .2600	+ .0000	— 0° 0'	5.399
8	607	800	1° 4'	6.030
.12	625	.1199	4° 51'	7.152
6	693	592	16° 33'	9.480
8	772	776	29° 45'	11.822
9	829	858	40° 37'	13.133
.20	903	925	55° 9'	14.339
1	992	970	72° 20'	.822
2	.3090	986	— 89° 9'	.306
3	190	974	$\pi + 77^\circ 10'$	13.153
4	284	943	66° 53'	11.932
5	373	897	59° 2'	10.935
7	532	778	48° 3'	9.423
9	671	634	40° 12'	8.410
.33	892	309	28° 46'	7.231
7	.4056	.0945	20° 15'	6.567
.41	171	563	13° 15'	.202
.45	+ .4241	+ .0169	$\pi + 6^\circ 59'$	6.005
.4670	+ .4258	.0000	$\pi + 4^\circ 27'$	

$$nT = 214^\circ 40'.$$

Interpolation between the above and a neighbouring orbit gave the following coordinates for the periodic orbit,

<i>s</i>	<i>x</i> — 1	<i>y</i>
.00	.2595	.0000
8	600	800
.12	616	.1199
6	681	593
8	757	778
9	812	861
.20	884	929
.21	.2973	.1975

Family *b* of oscillating satellites continued.

<i>s</i>	$x - 1$	<i>y</i>
.22	.3071	.1992
3	170	980
4	264	948
5	352	900
7	508	777
9	642	630
.33	852	299
7	.4001	.0931
.41	095	546
.45	.4139	.0154
.4656	.4149	.0000

$$nT = 208^{\circ}.$$

SUR LES SÉRIES DE TAYLOR.

Lettre adressée à l'éditeur

PAR

EMILE BOREL

à PARIS.

Monsieur,

Vous avez bien voulu me demander de vous indiquer comment on pourrait, en partant des éléments, démontrer les théorèmes sur les séries de TAYLOR que j'ai énoncés dans les Comptes Rendus, en décembre 1896 (en esquissant une démonstration reposant sur deux mémoires relatifs aux séries divergentes, parus en 1896 dans le Journal de M. JORDAN). Je suis très heureux d'avoir une occasion de vous montrer comment des résultats, auxquels ma théorie des séries divergentes m'a conduit d'une manière intuitive, peuvent être démontrés directement par une méthode peut-être plus simple, mais qui semble assez artificielle.

Je considère une série de TAYLOR dont le rayon de convergence est égal à l'unité:

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

et je suppose, pour plus de netteté, que $\sqrt[n]{|a_n|}$ a pour limite un. Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, rien ne serait changé aux conclusions qui suivent, comme on le voit par des remarques analogues à celles que j'ai faites dans le Journal de M. JORDAN (1896, p. 451).

J'appellerai fonction entière associée à la fonction $f(z)$, la fonction

$$F(z) = \sum \frac{a_n z^n}{n!}.$$

Lorsque on donne à z toutes les valeurs de module r , appelons $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$; on démontre facilement (voyez mon mémoire sur les zéros des fonctions entières que vous imprimez actuellement dans les Acta¹⁾ que, lorsque r augmente indéfiniment $e^{-r(1+a)} M(r)$ tend

¹⁾ Acta mathematica, t. 20.

vers zéro et $e^{-r(1-\alpha)}M(r)$ ne tend pas vers zéro, quelque petit que soit le nombre positif α . D'autre part, posons $z = re^{i\theta}$, r et θ étant réels, et considérons le produit $e^{-r(1-\alpha)}F(z)$, dans lequel θ reste fixe et r augmente indéfiniment; α est un nombre positif arbitraire. Si, quel que soit α , ce produit ne tend pas vers zéro pour r infini, θ sera dit un argument singulier pour la fonction entière $F(z)$; si l'on peut prendre α assez petit pour que le produit tende vers zéro, θ sera dit un argument ordinaire de la fonction $F(z)$. Cela posé, la première proposition que nous avons à démontrer est la suivante: *les points singuliers de la fonction $f(z)$ sur son cercle de convergence ont précisément pour arguments les arguments singuliers de la fonction entière associée $F(z)$.*

Pour démontrer cette proposition, désignons par I' un contour infiniment voisin du contour I'' obtenu en menant des tangentes au cercle de convergence de $f(z)$ en chaque point singulier; I' est intérieur à I'' ; supposons d'ailleurs que I' ne renferme pas de points singuliers de $f(z)$ (dans le cas contraire, il suffirait de compléter I'' en menant en chaque point singulier une perpendiculaire à la droite qui le joint à l'origine). Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{I'} \frac{f(z)}{z} e^{a\left(\frac{z}{z}-1\right)} dz.$$

Il est manifeste que, lorsque la constante positive a augmente indéfiniment, x étant un point quelconque intérieur à I' , cette intégrale tend vers zéro; car dans ces conditions, on a, sur tout le contour I' , $\left| e^{a\left(\frac{z}{z}-1\right)} \right| < e^{-ka}$, k étant un nombre positif (voir mon mémoire du Journal de M. JORDAN).

Or il est aisé de voir que cette intégrale est précisément égale à $e^{-a}F(ax)$. Donc ce produit tend vers zéro lorsque a augmente indéfiniment par valeurs positives, lorsque x est intérieur à I' . Mais, si θ est l'argument d'un point du cercle de convergence, non singulier pour $f(z)$, nous pouvons prendre $x = \frac{e^{i\theta}}{1-\alpha}$, α étant positif; si α est assez petit, x est intérieur à I' . Dès lors, si l'on pose $a = r(1-\alpha)$, on a

$$e^{-a}F(ax) = e^{-r(1-\alpha)}F(re^{i\theta})$$

et, par définition, dire que l'on peut choisir α de manière que ce produit tende vers zéro lorsque r augmente indéfiniment, c'est dire que θ est un

argument ordinaire pour $F(z)$. Par conséquent, aux points ordinaires de $f(z)$ correspondent des arguments ordinaires de $F(z)$. Il reste à faire voir que, réciproquement, aux arguments ordinaires de $F(z)$ correspondent des points ordinaires de $f(z)$. Une remarque préliminaire est indispensable. Supposons, que dans un intervalle (θ_0, θ_1) donné, la fonction $F(z)$ ait des arguments singuliers partout condensés (überall dicht); nous savons déjà que la fonction $f(z)$ a sur l'arc correspondant du cercle de convergence, des points singuliers partout condensés, c'est à dire que cet arc est regardé comme singulier dans son entier. Au point de vue de la recherche des singularités de $f(z)$, il est donc sans intérêt de rechercher si dans l'intervalle (θ_0, θ_1) la fonction $F(z)$ a ou non des arguments ordinaires. Les raisons de continuité que nous allons invoquer bientôt montreraient qu'elle n'en a pas; cependant, en modifiant légèrement leur définition, on pourrait sans doute arriver à reconnaître si $f(z)$ tend vers une limite déterminée lorsque z tend vers le cercle de convergence avec un argument déterminé, mais ce n'est point la question qui nous occupe actuellement.

Nous pouvons donc nous borner à considérer le cas où $F(z)$ admet comme arguments ordinaires tous les arguments compris entre θ_0 et θ_1 ; il s'agit de montrer que l'arc correspondant du cercle de convergence est un arc ordinaire de $f(z)$. Par hypothèse, à chaque valeur de θ comprise entre θ_0 et θ_1 , les limites étant comprises, correspond un nombre positif α tel que le produit $e^{-r(1-\alpha)} F(re^{i\theta})$ tend vers zéro lorsque r augmente indéfiniment par valeurs positives. On voit aisément que la limite supérieure A , des valeurs que l'on peut donner à α pour une même valeur de θ , est une fonction continue de θ ; dès lors, si l'on considère les valeurs de A correspondant aux diverses valeurs de θ comprises entre θ_0 et θ_1 , elles admettent une limite inférieure qui ne peut être nulle; sinon elle serait atteinte pour quelque valeur de θ , laquelle serait un argument singulier, contrairement à l'hypothèse; il résulte de là que nous pouvons trouver une valeur fixe de α telle que, quel que soit θ entre θ_0 et θ_1 , on ait

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r(1-\alpha)} F(re^{i\theta}) = 0.$$

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\int_0^x e^{-a} F(az) da.$$

Cette intégrale représente, lorsqu'elle a un sens, une fonction analytique de z , qui coïncide visiblement avec la fonction $f(z)$ à l'intérieur de son cercle de convergence. Or il est manifeste qu'elle conserve un sens si l'on suppose l'argument de z compris entre θ_0 et θ_1 , son module étant inférieur à $\frac{1}{1-\alpha}$; la fonction analytique $f(z)$ peut donc être prolongée au delà de l'arc $\theta_0\theta_1$ du cercle de convergence, c. q. f. d.

Notre proposition est donc complètement établie: *les arguments singuliers et ordinaires de $F(z)$ correspondent respectivement aux points singuliers et ordinaires de $f(z)$.*

Voici maintenant une application de cette proposition, application qui repose sur la détermination simple de certains arguments singuliers. Considérons une série de modules croissants

$$r_0, r_1, r_2, \dots$$

et faisons leur correspondre des nombres positifs *tendant vers zéro*:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

Supposons que θ_n soit un argument *quelconque* tel que l'on ait

$$(1) \quad |F(r_n e^{i\theta_n})| > e^{r_n(1-\alpha_n)}.$$

Je dis que tout argument θ , que l'on peut prendre égal à θ_n pour une infinité de valeurs de n , est un argument singulier; car, si la relation (1) est vérifiée, lorsque $\theta_n = \theta$, pour une infinité de valeurs de n , on ne peut avoir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r(1-\alpha)} F(re^{i\theta}) = 0;$$

car, quelque petit que soit α , α_n finit par être inférieur à α pour les grandes valeurs de n . On ne trouve pas d'ailleurs ainsi certainement tous les arguments singuliers; par exemple, si les α décroissent trop rapidement, il peut se faire que la relation (1) ne soit vérifiée pour aucune valeur de θ_n ; mais les arguments que l'on obtient sont certainement singuliers, quels que soient les r et les α (satisfaisant aux conditions indiquées).

Supposons maintenant que nous partagions les termes successifs de $F(z)$ en groupes, de telle manière que le $n^{\text{ième}}$ groupe soit formé des termes dont le rang est compris entre $2^{2n-1} = s$ et $2^{2n+1} = s^4$. Considérons ce

groupe de termes, dans lequel nous donnons au module de z la valeur $s^2 (= 2^{2^n})$; il est très aisé de voir que le maximum du module de ce polynome (lorsque l'argument de z prend toutes les valeurs possibles) diffère très peu du maximum du module de $F(z)$ pour la même valeur s^2 du module de z ; autrement dit, les termes de $F(z)$ qui ne figurent pas dans ce $n^{\text{ième}}$ groupe ont, pour $|z| = s^2$, une somme négligeable par rapport aux grandes valeurs du module de $F(z)$. On en conclut aisément qu'en choisissant convenablement les α et en prenant $r_n = 2^{2^n}$, on peut définir les arguments θ_n *exclusivement à l'aide des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe*; d'ailleurs ces θ_n couvriront, si l'on veut, un arc du cercle, supérieur à sa $n^{\text{ième}}$ partie et tel, par suite, que *la somme de tous les arcs, correspondant ainsi à toutes les valeurs de n , augmente indéfiniment avec n* . Pour qu'un argument θ soit singulier, il suffit qu'il appartienne à une infinité de tels arcs. Or il est clair que, si l'on suppose la fonction $F(z)$ *quelconque*, c'est à dire ses coefficients indépendants les uns des autres, ces arcs recouverts par les θ_n , étant définis séparément par des groupes successifs de coefficients sans lien entre eux, devront être regardés comme indépendants. On a donc sur un cercle *une infinité d'arcs indépendants*, dont la somme dépasse tout nombre donné; donc, *en général*, tout point du cercle appartiendra à une infinité d'arcs. Donc, *en général*, tous les arguments d'une fonction entière sont singuliers et par suite, *dans le cas général, une série de Taylor admet son cercle de convergence comme coupure*. C'est là la conclusion que je me proposais d'établir et que j'ai démontrée pour la première fois dans les Comptes Rendus du 11 décembre 1896. On pourrait, je crois, tirer bien d'autres conséquences de cette méthode de recherche des points singuliers et, tout d'abord, l'étendre au moins à certains points singuliers non situés sur le cercle de convergence, mais j'ai déjà peut-être trop abusé de votre bienveillante attention.

Je termine donc en vous priant d'agréer l'expression de mes sentiments de respect et de sincère dévouement.

Paris, le 22 mai 1897.

SUR LES PÔLES DES FONCTIONS UNIFORMES À PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES

PAR

LÉON AUTONNE

à LYON.

CHAPITRE I.

Problème $[r + 1]$.

1° Prenons une fonction uniforme X de $r + 1$ variables indépendantes y et x_i , ($i = 1, 2, \dots, r$), que l'on peut toujours assimiler aux coordonnées d'un point ζ dans un espace à $r + 1$ dimensions E_{r+1} . Un point ω , $[y = b; x_i = a_i]$, où X n'est pas régulière, sera un «point singulier non essentiel» (WEIERSTRASS, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*; 5^{ème} section; page 130) ou «pôle», si, dans le domaine de ω , X est identique au quotient $P_1 : P_0$ de deux fonctions régulières en ω .

2° Supposons que les deux séries P_1 et P_0 , débarrassées de leur p. g. c. d., soient nulles en ω . Les allures de X sont très indéterminées en ω et aux abords (WEIERSTRASS, l. c. pages 130 et suivantes), comme on sait.

Il m'a paru intéressant de discuter cette indétermination de X au pôle par une voie un peu différente. Cette dernière est, au fond, une généralisation des procédés employés, dans le cas d'une seule variable, pour lever l'indétermination des symboles dits illusoires $\frac{0}{0}$.

3° La valeur X_ω de X au pôle n'est plus calculable par la division $P_1 : P_0$, le dividende et le diviseur étant nuls tous deux. X_ω sera, par

définition, la valeur limite vers laquelle tend X , quand ζ tend vers ω , c'est à dire quand les modules $|y - b|$, $|x_i - a_i|$ décroissent indéfiniment. Seulement alors X_ω ne sera plus unique et dépendra

soit de la loi conformément à laquelle décroissent simultanément les modules $|y - b|$ et $|x_i - a_i|$,

soit, pour employer un langage géométrique, de l'itinéraire \mathfrak{B} , que suit ζ pour tendre vers ω .

Dans le cas d'une seule fonction X , X_ω peut (WEIERSTRASS l. c.) prendre en ω une valeur quelconque arbitrairement donnée à l'avance. Au contraire prenons N fonctions, ($N \geq r + 1$; $P_j = 0$ en ω):

$$X_j = P_j : P_0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

munies d'un même dénominateur P_0 et analogues à $X = P_1 : P_0 = X_1$.

Les N valeurs limites des X_j en ω , fournies par un même itinéraire \mathfrak{B} , ne sont pas simultanément arbitraires. Si l'on s'en donne quelques-unes, les autres s'en déduisent.

C'est l'étude de ces dépendances mutuelles qui constitue le fond des présentes recherches.

4° Supposons, pour simplifier, le pôle ω situé à l'origine des coordonnées dans l'espace E_{r+1} , c'est à dire $b = a_i = 0$; prenons $N + 1$ fonctions $F_j(y, x_1, \dots, x_r)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, régulières et nulles en ω , avec $N \geq r + 1$. Nous traiterons le problème suivant:

»construire tous les systèmes de valeurs limites vers lesquelles tendent simultanément les rapports des F_j , quand les modules des $r + 1$ variables tendent à la fois vers zéro».

Nous lui donnerons le nom de »problème $[r + 1]$ », notation qui met en évidence le nombre $r + 1$ des variables indépendantes. Le nombre N ne joue aucun rôle essentiel, pourvu qu'il ne soit pas inférieur à $r + 1$.

5° On peut formuler le problème $[r + 1]$ dans un langage géométrique plus commode.

Les $r + 1$ variables indépendantes y et x_i , $i = 1, 2, \dots, r$, étant, comme précédemment, les coordonnées d'un point ζ dans un espace E_{r+1} à $r + 1$ dimensions, prenons, dans un espace E_N , les $N + 1$ coordonnées homogènes ξ_j , $j = 0, 1, 2, \dots, N$, d'un point ξ .

En vertu des égalités $\rho \xi_j = F_j$, $\rho =$ facteur de proportionnalité, ξ est l'image de ζ . Quand ζ parcourt dans E_{r+1} le domaine commun de convergence \mathfrak{E} des séries F_j , ξ parcourt dans E_N une variété à $r + 1$ dimensions Ξ_{r+1} . Lorsque ζ tend vers ω suivant un certain itinéraire \mathfrak{B} , ξ tend vers une certaine position limite $\bar{\xi}$, dont les coordonnées $\bar{\xi}_j$ sont proportionnelles aux limites des F_j .

Le problème $[r + 1]$ s'énonce géométriquement ainsi: »construire la figure \mathcal{Q}_{r+1} , constituée par l'ensemble des points $\bar{\xi}$ ».

6° Le problème $[1]$ ou $r = 0$ se résout immédiatement; \mathcal{Q}_1 se réduit à un point unique.

J'ai consacré à la résolution du problème $[2]$

une Note (11 novembre 1895) insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris,

un Mémoire inséré aux iRendicon du Cerele Mathématique de Parme année 1896.

Le cas $r = 2$, problème $[3]$, a fait l'objet de deux Notes (Comptes Rendus, 9 et 30 décembre 1895).

Pour le problème $[2]$, \mathcal{Q}_2 est un système de courbes unicursales de l'espace E_N , que j'ai appelées »fondamentales».

Dans le problème $[3]$, \mathcal{Q}_3 est, dans E_N ,

ou bien: un système de surfaces en nombre fini, accompagné d'un système de courbes unicursales en nombre fini (le pôle ω est alors un *zénith*);

ou bien: un système exclusivement composé de courbes unicursales en nombre fini (le pôle ω est alors un *nadir*).

Les mots »courbe» et »surface» de l'espace E_N désignent des variétés à une et deux dimensions respectivement.

Les théories qu'on trouvera ci-après sont entièrement différentes de celles qui viennent d'être rappelées. Il convient d'expliquer pourquoi.

7° Pour résoudre le cas $[3]$ j'ai employé un procédé de réduction successive pour la singularité du pôle sur la surface $F_j = 0$. Ce mode de raisonnement devient inextricable pour plus de trois variables indépendantes.

8° Le procédé qui m'a servi à résoudre le cas $[2]$ ne peut non plus se généraliser.

Il est licite dans tous les cas, comme on le verra dans le chapitre suivant, sans restreindre la généralité, de faire

$$F_j = K_j y^m \sum_{l=m-1}^{l=0} y^l A_{jl}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

où les K sont des constantes non nulles et les A des fonctions régulières et nulles au pôle ω .

Soient η_{jl} , $l = 1, 2, \dots, m$, les m racines de l'équation *algébrique* en y , $F_j = 0$. Alors

$$F_j \equiv K_j \prod_l (y - \eta_{jl}).$$

Pour $r = 1$, problème [2], on connaît parfaitement la nature analytique des η . M. POINCARÉ dans sa Thèse Inaugurale a démontré que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_{jl} = \theta_{jl}(t), & t^{n_l} = x_1; \\ \theta_{jl} = \text{holomorphe}; & n_{jl} = \text{entier positif} \leq m \end{array} \right\}.$$

Au premier chapitre de mon Mémoire des Rendiconti, j'ai effectivement construit les développements θ .

Dès lors la décomposition de F_j en facteurs binômes $y - \eta_{jl}$ peut se réaliser et a servi de base à mon analyse des Rendiconti.

Au contraire, quand $r > 1$, on connaît beaucoup moins la nature des fonctions η ; la décomposition en facteurs ne sert plus à rien.

9° A la vérité M. KOBÉ (Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1892) dans son Mémoire: *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, a, quand F_j est un polynôme par rapport à toutes les variables, représenté les y et x_i , liées par l'équation $F_j = 0$, par un nombre fini de séries à r variables auxiliaires u . Seulement le choix des u comporte une dose considérable d'indétermination qui masque la nature des η . Cette indétermination n'est pas fortuite et ne peut être levée. Elle a sa source dans le fait bien connu suivant: quand on représente une relation algébrique entre deux variables par un nombre fini de séries, le choix de ces dernières peut se faire d'une *infinité de façons différentes* (position arbitraire des points réguliers sur la courbe algébrique).

Il n'est pas douteux que les η possèdent des propriétés indépendantes du choix des u ; on trouverait là matière à l'établissement d'une *théorie des invariants*. Cette dernière a été esquissée par M. Kobb lui-même (*Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 1893, pages 76 à 81), mais semble extrêmement difficile.

10° Quoiqu'il en soit, j'ai dû résoudre le problème $[r + 1]$ par une toute autre voie que les problèmes $[2]$ et $[3]$.

La méthode tout-à-fait générale est celle-ci: «ramener la résolution du problème $[r + 1]$ à celle du problème $[r]$ » c'est à dire, procédant de proche en proche «à celle du problème $[1]$ », directement soluble, ou à celle du problème $[2]$ » résolu précédemment.

Les détails d'application pour la méthode sont exposés ci-après au chapitre II, mais en voici le principe très-simple.

Comme, dans les relations

$$\rho \xi_j = F_j(y; x_1, x_2, \dots, x_r)$$

qui définissent le problème $[r + 1]$, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les F_j sont des polynômes en y , le procédé purement élémentaire et rationnel de l'élimination ordinaire, convenablement dirigé, permet de se débarrasser de la $[r + 1]^{\text{ième}}$ variable y , et on est ramené au cas de r variables c'est à dire au problème $[r]$.

Un résumé de la méthode a paru dans les Comptes Rendus (18 janvier 1897).

11° Il serait oiseux d'énumérer toutes les applications possibles des présentes recherches; le lecteur les apercevra lui-même sans peine.

J'en signalerai seulement deux.

On peut faire la discussion *complète*, quelle que soit la singularité, des points *fondamentaux* et des courbes *fondamentales* dans les substitutions Cremona, c'est à dire birationnelles planes. C'est ce qu'on trouvera au troisième chapitre de mon Mémoire des Rendiconti.

Il est possible d'établir une généralisation complète, pour une singularité aussi compliquée qu'on voudra, des travaux de M. NÖTHER (Math. Annalen, t. 3, *Über eindeutige Transformation des Raumes*) relatifs aux points «fondamentaux», aux courbes et surfaces «fondamentales» dans les substitutions birationnelles de l'espace ordinaire.

C'est à l'occasion de ce dernier problème (voir ma Note des Comptes Rendus du 11 mai 1896, *Sur les substitutions régulières non linéaires*) que j'ai abordé les présentes recherches.

La théorie de la birationnalité dans l'espace ordinaire fera l'objet d'un travail ultérieur.

CHAPITRE II.

Réduction du problème $[r + 1]$ au problème $[r]$.

1° Soient les équations

$$\rho \xi_j = F_j(y; x_1, \dots, x_r), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N,$$

où les F_j sont des séries entières, convergentes pour

$$|y| \leq \delta \quad |x_i| \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

les δ étant des quantités positives données; de plus, par hypothèse,

$$F_j(0; 0, \dots, 0) = 0.$$

Le problème $[r + 1]$, défini aux 4° et 5° du chapitre I, consiste »à connaître tous les systèmes de valeurs, vers lesquelles tendent les rapports des F_j , quand les modules des $r + 1$ variables y et x_i tendent vers zéro», ou, en langage géométrique, »à construire la figure \mathcal{Q}_{r+1} , lieu du point $\bar{\xi}$, quand le point ζ de l'espace E_{r+1} tend vers le point ω , où toutes les variables sont nulles, par tous les itinéraires possibles \mathfrak{B} ».

Je dirai qu'un itinéraire \mathfrak{B} fournit le point $\bar{\xi}$, lorsque ξ tend vers $\bar{\xi}$, quand ζ tend vers ω en suivant \mathfrak{B} .

Si, dans E_{r+1} , ζ tend vers ω suivant \mathfrak{B} , le point x , de coordonnées x_i , dans un espace E_r , tend vers le point x_0 , où $x_i = 0$, suivant un itinéraire parfaitement déterminé \mathfrak{w} .

2° Opérant au besoin une collinéation convenable tant sur les $N + 1$ variables ξ_j que sur les $r + 1$ variables y et x_i , c'est à dire un change-

ment de coordonnées dans les deux espaces E_N et E_{r+1} , il est licite de supposer que

$$F_j(y; 0, 0, \dots, 0) = y^m \{K_j + y(\dots)\},$$

la constante $K_j \neq 0$. Alors le théorème fondamental de WEIERSTRASS permet de remplacer F_j par

$$f_j \cdot \{1 + \Phi_j(y, x_1, \dots, x_r)\}, \quad \Phi_j(0; 0, \dots, 0) = 0,$$

$$f_j(y) = K_j y^m + a_{j,m-1} y_{m-1} + \dots + a_{j0},$$

les a étant holomorphes en x_i et nuls avec $x_i = 0$; $i = 1, 2, \dots, r$.

Il est évident que les rapports des F_j tendent vers les mêmes limites que les rapports des *polynômes* $f_j(y)$ en y .

3° Rappelons maintenant, en les étendant à un espace E_N quelconque, quelques propriétés des courbes planes unicursales (voir LÜROTH, Math. Annalen, t. 9, et CLEBSCH, *Leçons sur la géométrie*, t. 3 de la traduction française A. BENOIST, page 287 et suivantes).

Soient les $N + 1$ équations

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \xi_j = f_j(y) = K_j y^m + \dots + a_{jl} y^l + \dots + a_{j0} \\ y = 0, 1, \dots, N; \quad l = 0; 1, \dots, m-1; \\ \text{les } K \text{ et les } a \text{ étant des constantes.} \end{array} \right.$$

Formons aussi les expressions

$$\zeta_{\alpha\beta}(y) = \begin{vmatrix} f_\alpha & \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} \\ f_\beta & \frac{\partial f_\beta}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots, N$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(y) = \sum_{n=0}^{n=2(m-1)} \Phi_{\alpha\beta n} y^n.$$

Quel est le lieu du point ξ quand y varie?

4° Il peut se faire d'abord que tous les $\zeta_{\alpha\beta}(y) \equiv 0$. Alors

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{f_\beta}{f_\alpha} \equiv 0 \quad f_\beta : f_\alpha = \text{Cte.}$$

Le p. g. c. d. des polynômes f_j est du degré m . Le point ξ est fixe. Ses coordonnées s'obtiennent par simple division des polynômes.

5° Ecartons ce cas particulier et supposons $\varphi_{01}(y) \not\equiv 0$, c'est à dire $f_1 : f_0$ variable. Soit k un troisième indice pris dans la suite $2, 3, \dots, N$.

Traitons $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k$ comme les coordonnées homogènes d'un point χ dans un plan \mathbf{e} . Les trois équations

$$(o) \quad \rho \xi_0 = f_0(y), \quad \rho \xi_1 = f_1(y), \quad \rho \xi_k = f_k(y)$$

définissent dans \mathbf{e} une courbe plane unicursale g . L'équation

$$P_k(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) = 0$$

de g s'obtient en éliminant ρ et y entre les trois égalités (o) ci-dessus; alors

$$P_k(f_0, f_1, f_k) \equiv 0.$$

La relation $P_k(\xi_0, \xi_1, \xi_k) \equiv P_k(\xi) = 0$ exprime que les deux équations en y

$$\frac{f_0}{\xi_0} = \frac{f_1}{\xi_1} = \frac{f_k}{\xi_k}$$

ont au moins une racine commune.

Les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial P_k}{\partial \xi_0}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial \xi_k}$$

sont proportionnelles respectivement à

$$\varphi_{1k}, \quad \varphi_{k0}, \quad \varphi_{01}.$$

Par hypothèse $\varphi_{01} \not\equiv 0$, donc $\frac{\partial P_k}{\partial \xi_k} \not\equiv 0$ et 1° la variable ξ_k *figure effective-ment* dans P_k , 2° $P_k(\xi) \not\equiv 0$.

P_k est une forme ternaire en ξ_0, ξ_1, ξ_k que nous écrirons

$$P_k = \sum p_{\beta_0 \beta_1 \beta_k}^{(k)} \xi_0^{\beta_0} \xi_1^{\beta_1} \xi_k^{\beta_k}.$$

Les p sont des polynômes par rapport aux coefficients (3°) K_j et a_{jl} .

6° Revenons maintenant à l'espace E_N et formons les $N-1$ équations

$$P_k = 0; \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

Elles sont toutes distinctes. Aucune en effet ne peut être une conséquence algébrique des autres, car chacune P_k est seule à contenir effectivement la variable ξ_k .

Les $N - 1$ équations $P_k = 0$ définissent donc dans l'espace E_N une variété à *une* dimension ou *courbe* Γ .

Sous le bénéfice des relations $P_k = 0$, les N équations en y

$$\frac{f_0}{\xi_0} = \frac{f_1}{\xi_1} = \dots = \frac{f_N}{\xi_N},$$

ou le système équivalent

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_\beta f_\alpha(y) - \xi_\alpha f_\beta(y) = 0 \\ \alpha, \beta = 0, 1, \dots, N \end{array} \right\},$$

possèdent s racines communes, $s \geq 1$. Les premiers membres de (o) possèdent un p. g. c. d. de degré s

$$Y(y; \xi) \equiv Y(\xi) \equiv Y(y) \equiv Y_s y^s + Y_{s-1} y^{s-1} + \dots + Y_0,$$

où, pour $\tau = 0, 1, \dots, s$,

$$Y_\tau(\xi) = \sum q_{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_N}^{(\tau)} \xi_0^{\gamma_0} \dots \xi_N^{\gamma_N}.$$

Y_τ est un polynôme homogène par rapport aux ξ_j et les coefficients $q^{(\tau)}$ sont des polynômes par rapport aux K_j et aux a_{ji} .

Si on traite y comme un paramètre, l'équation $Y(\xi) = 0$ représente une «hypersurface» H .

7° Le point ξ , donné par les équations (o) du 3°, peut aussi être envisagé comme obtenu, dans l'espace E_N , par l'intersection de la courbe Γ avec l'hypersurface H . La courbe et l'hypersurface n'ont qu'une seule intersection *mobile avec* y ; les coordonnées de cette intersection sont donc rationnelles en y . Elles sont proportionnelles aux f_j .

8° Rien n'est à changer aux calculs précédents (3° à 7°) lorsque les a_{ji} ne sont plus des constantes (comme au 3°) mais des fonctions holomorphes en x_i (comme au 2°).

Prenons le point x , de coordonnées x_i , indéterminé dans l'espace E_r et dans le domaine de convergence des séries. Nous aurons encore les

$N - 1$ équations $P_k(\xi; x) = 0$ de la courbe Γ et l'équation $Y(y; \xi; x) = 0$ de l'hypersurface H . Les coefficients

$$\Phi_{a, \beta n} \quad \text{de} \quad \varphi_{a, \beta}(y) \quad (3^\circ)$$

$$p^{(k)} \quad \text{de} \quad P_k \quad (5^\circ)$$

$$q^{(\tau)} \quad \text{de} \quad Y_\tau \quad (6^\circ)$$

sont holomorphes en x_i . Pour $x_i = 0$ les a_{jl} s'évanouissent par hypothèse. On voit sans peine qu'il en est de même des $\Phi_{a, \beta n}$. Alors $\varphi_{a, \beta}(y) \equiv 0$, $\frac{\partial P_k}{\partial \xi_0} = \frac{\partial P_k}{\partial \xi_1} = \frac{\partial P_k}{\partial \xi_k} \equiv 0$, $P_k \equiv 0$, $\rho_{\beta_0 \beta_1 \beta_k}^{(k)} = 0$. Les équations (o) du 6° ont $m > s$ racines nulles c'est à dire communes et $q_{\gamma_0 \dots \gamma_N}^{(\tau)} = 0$.

Quand x voyage dans le domaine de convergence commun \mathfrak{C} des séries a , Φ , $p^{(k)}$, $q^{(\tau)}$, la courbe Γ et l'hypersurface H varient. Pour x infiniment voisin de x_0 (1°), c'est à dire pour $|x_i|$ infiniment petit,

$$|a_{jl}|, |\Phi_{a, \beta n}|, |p_{\beta_0 \beta_1 \beta_k}^{(k)}|, |q_{\gamma_0 \dots \gamma_N}^{(\tau)}|$$

sont aussi infiniment petits.

9° Au lieu d'appliquer le calcul du 5° aux trois indices $0, 1, k$ nous aurions pu l'appliquer à trois indices différents quelconques j, j', j'' pris dans la suite $0, 1, \dots, N$. Au lieu de P_k nous aurions obtenu

$$\Delta_{jjj''}(\xi_j, \xi_{j'}, \xi_{j''}) = \sum D_{\beta_j \beta_{j'} \beta_{j''}}^{(\beta_j \beta_{j'} \beta_{j''})} \xi_j^{\beta_j} \xi_{j'}^{\beta_{j'}} \xi_{j''}^{\beta_{j''}}.$$

Les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \Delta_{jjj''}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_{j'}} \Delta_{jjj''}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_{j''}} \Delta_{jjj''}$$

sont alors proportionnelles respectivement à

$$\varphi_{jjj''}(y), \quad \varphi_{jjj'}(y), \quad \varphi_{jjj''}(y).$$

10° Par hypothèse, nous savons résoudre le problème [r]. Appliquons le procédé aux fonctions D et Φ des r variables x_i . Dans l'espace E_r , x suivant vers x_0 un certain itinéraire w nous construirons toutes les

limites des rapports des D et des ϕ . Nous pourrions notamment mettre dans $\varphi_{\alpha\beta}(y)$ un coefficient $\phi^{(\alpha\beta)}$ en facteur, tel que

$$\lim \frac{\phi_{\alpha\beta n}}{\phi^{(\alpha\beta)}}, \quad n = 0, 1, \dots, 2(m-1),$$

reste finie¹ et écrire

$$\varphi_{\alpha\beta}(y) = \phi^{(\alpha\beta)} \chi_{\alpha\beta}(y).$$

Cela exige bien entendu que $\varphi_{\alpha\beta}(y) \not\equiv 0$ et qu'un au moins des $\phi_{\alpha\beta n} \not\equiv 0$, quand x parcourt l'itinéraire w .

Enfin nous choisirons une combinaison $\alpha\beta$ d'indices $\alpha\beta$ telle que

$$(o) \quad \lim \frac{\phi^{(\alpha\beta)}}{\phi^{(01)}}$$

reste finie¹ pour toutes les combinaisons d'indices $\alpha\beta$. Cela n'est pas en contradiction avec le choix fait au 5° des indices 0 et 1, car actuellement $\varphi_{01}(y) \not\equiv 0$, sans quoi l'expression (o) est infinie ou indéterminée.

Alors

$$\gg \lim \frac{\varphi_{\alpha\beta}(y)}{\varphi_{01}(y)} = \lim \frac{\phi^{(\alpha\beta)} \chi_{\alpha\beta}(y)}{\phi^{(01)} \chi_{01}(y)}$$

ne peut être infinie quel que soit y .

11° Les choses étant ainsi préparées, abordons la résolution du problème $[r+1]$ et faisons tendre x vers x_0 suivant l'itinéraire w .

Il peut se faire que, tout le long de w , $\phi_{\alpha\beta n} \equiv 0$ pour tous indices α, β, n . On s'en assurera en appliquant le procédé de résolution du problème $[r]$ (pour abrégé »procédé $\{r\}$ ») aux fonctions $\phi_{\alpha\beta n}$ des r variables x_i .

On est alors dans le cas du 4°; les rapports des $f_j(y)$ sont indépendants de y ; les ξ_j sont proportionnels à des fonctions holomorphes des x_i et le procédé $\{r\}$ permettra de construire les $\bar{\xi}_j$ et le point $\bar{\xi}$.

12° Ce cas particulier écarté, choisissons, grâce à une application convenable du procédé $\{r\}$, les deux indices 0 et 1 comme il est dit au 10°.

¹ N. B. — Je comprends zéro parmi les quantités finies.

Vers quelle limite tend la courbe I' définie par les $N - 1$ équations du 6°

$$P_k(\xi, x) = 0?$$

Il suffit de voir vers quelle limite tendent les premiers membres des $P_k = 0$.

Le procédé $\{r\}$ fournit les limites de tous les rapports des coefficients

$$P_{\beta_0 \beta_1 \beta_k}^{(k)},$$

fonctions holomorphes des x_i . Mettons dans P_k en facteur un coefficient $\bar{\omega}_k$ tel que

$$\lim \frac{P_{\beta_0 \beta_1 \beta_k}^{(k)}}{\bar{\omega}_k}$$

reste finie et posons

$$P_k = \bar{\omega}_k \bar{P}_k'(\xi).$$

La courbe \bar{I}' , limite de I' , sera définie par les $N - 1$ équations

$$\bar{P}_k(\xi) \equiv \bar{P}_k(\xi_0, \xi_1, \xi_k) = 0,$$

\bar{P}_k étant la limite de \bar{P}_k' .

Reste à montrer que les équations $\bar{P}_k = 0$ sont toutes distinctes comme les $P_k = 0$.

15° Il suffit d'établir (6°) que la coordonnée ξ_k figure effectivement dans \bar{P}_k , ou que

$$\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \xi_k} \neq 0.$$

Si, en effet, $\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \xi_k} \equiv 0$, alors quel que soit y ,

$$\lim \frac{\frac{\partial P_k}{\partial \xi_0}}{\frac{\partial P_k}{\partial \xi_k}} \equiv \infty, \quad \lim \frac{\frac{\partial P_k}{\partial \xi_1}}{\frac{\partial P_k}{\partial \xi_k}} \equiv \infty$$

c'est à dire (5°)

$$\lim \frac{\varphi_{1k}}{\varphi_{01}} \equiv \infty, \quad \lim \frac{\varphi_{k0}}{\varphi_{01}} \equiv \infty;$$

cela est contraire à l'hypothèse faite (12° et 10°) sur le choix des deux indices 0 et 1.

D'ailleurs on ne peut avoir $\bar{P}_k(\xi) \equiv 0$, quels que soient ξ_0, ξ_1, ξ_k car la dérivée partielle par rapport à ξ_k n'est pas $\equiv 0$, comme proportionnelle à (voir 10°)

$$\lim \chi_{01}(y) = \lim \frac{\varphi_{01}(y)}{\psi_{01}}.$$

Bref toutes les $N - 1$ équations $P_k = 0$ sont distinctes et définissent une courbe \bar{T} , limite de T . On voit que la construction de \bar{T} exige seulement l'application du procédé $\{r\}$.

14° Théorème: »Le point $\bar{\xi}$ est sur la courbe \bar{T} .»

Cela résulte immédiatement du 7° car ξ est, pour chaque position de x , à l'intersection de T avec H . Quand x tend vers x_0 et ξ vers $\bar{\xi}$, T tend vers \bar{T} , donc $\bar{\xi}$ est sur \bar{T} , c. q. f. d.

15° Tout point de \bar{T} fait-il partie de \mathcal{Q}_{r+1} ?

Il faut répondre par l'affirmative.

Soit en effet μ un point *quelconque* de \bar{T} défini comme intersection de \bar{T} avec l'hyperplan $\mu_0 \xi_1 - \mu_1 \xi_0 = 0$, le quotient $\mu_1 : \mu_0$ étant arbitraire. Je vais construire un itinéraire \mathfrak{B} fournissant (1°) le point μ .

16° Les équations $P_k(\xi) = 0$ expriment (6°) que le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{\beta} f_{\alpha}(y) - \xi_{\alpha} f_{\beta}(y) = 0 \\ \alpha, \beta = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right\}$$

d'équations en y possède s racines communes, $s \geq 1$.

Soit λ , de coordonnées λ_j avec $\lambda_1 : \lambda_0 = \mu_1 : \mu_0$, un point d'intersection de T avec l'hyperplan précédent $\lambda_0 \xi_1 - \lambda_1 \xi_0 = 0$. Les équations en y

$$\lambda_{\beta} f_{\alpha}(y) - \lambda_{\alpha} f_{\beta}(y) = 0$$

auront, pour x quelconque, s racines communes. Soit η l'une d'elles. D'ailleurs (3°)

$$\lambda_{\beta} f_{\alpha}(y) - \lambda_{\alpha} f_{\beta}(y) = y^m \{ \lambda_{\beta} K_{\alpha} - \lambda_{\alpha} K_{\beta} \} + y^{m-1}(\dots) + \dots;$$

toutes les m racines s'évanouissent quand $|x_i| = 0$, x venant en x_0 , le point λ étant distinct du point K de coordonnées K_j . Donc » η a zéro pour limite».

Faisons décrire au point ζ un itinéraire \mathfrak{B} ainsi défini

1° x décrit l'itinéraire w , dont il a été question au cours du présent chapitre,

$$2^{\circ} \quad y = \eta.$$

Il est évident que, suivant \mathfrak{B} , ζ aboutit en ω .

Le point ξ coïncide avec λ et ne peut quitter ni la courbe Γ ni l'hyperplan; à la limite ξ vient en $\bar{\xi}$ sur $\bar{\Gamma}$ sans avoir quitté l'hyperplan, donc $\bar{\xi}$ coïncide avec μ , c. q. f. d.

17° La démonstration ne subsiste plus pour le point K , de coordonnées K_j , lui-même. K fait d'ailleurs aussi partie de Ω_{r+1} car il est très facile de construire un itinéraire \mathfrak{B} qui fournisse K .

Posons à cet effet $x_i = y^{\rho_i}$, $\rho_i =$ entier positif. Le coefficient a_{ji} de f_j devient

$$a_{ji} = y^{\sigma_i} A_{ji}(y), \quad A_{ji}(0) \neq 0.$$

On peut toujours prendre les ρ assez grands pour que les σ soient aussi grands que l'on voudra et en particulier pour que

$$m < l + \sigma_{jl}.$$

Alors dans f_j c'est le terme $K_j y^m$ qui est d'ordre minimum en y et l'itinéraire \mathfrak{B} défini par

$$x_i = y^{\rho_i}$$

fournit le point K .

18° Toute la discussion du présent chapitre se résume ainsi qu'il suit. Partant des équations (3°)

$$\rho \xi_j = K_j y + \sum_{l=m-1}^{l=0} y^l a_{jl}(x_1, \dots, x_r) = f_j(y),$$

formons les expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{a,\beta} = \left| \begin{array}{c} f_a \frac{\partial f_a}{\partial y} \\ f_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial y} \end{array} \right| = \sum_{n=0}^{n=2(m-1)} y^n \Phi_{a,\beta n}(x_1, \dots, x_r) \\ \text{et} \\ P_k = \sum \xi_0^{\beta_0} \xi_1^{\beta_1} \xi_k^{\beta_k} p_{\beta_0 \beta_1 \beta_k}^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_r). \end{array} \right\}.$$

Soit Ω_r la figure lieu du point \bar{h} , le point \bar{h} ayant des coordonnées proportionnelles aux

$$\phi_{a,\bar{z}_n} \quad \text{et aux} \quad p_{\bar{z}_0\bar{z}_1\bar{z}_2}^{(k)}.$$

La construction de Ω_r exige uniquement la résolution du problème [r].

Un point \bar{h} de Ω_r fournit pour la figure Ω_{r+1} , lieu du point $\bar{\xi}$.

soit un point unique U (éventualité du 11°) que fait immédiatement connaître le procédé $\{r\}$,

soit une courbe toute entière \bar{T} , c'est à dire ∞ points.

Quand \bar{h} parcourt Ω_r , U ou \bar{T} engendrent Ω_{r+1} .

Appelons S_i le nombre des dimensions que possède Ω_i .

$S_{r+1} = S_r + 1$, s'il existe au moins une courbe telle que \bar{T} ,

$S_{r+1} = S_r$, s'il existe seulement des points tels que U .

Bref $S_{r+1} \leq S_r + 1$ et, comme $S_1 = 0$, $S_{r+1} \leq r$. »Le nombre de dimensions de la figure Ω est au plus égal à celui des variables indépendantes, diminué d'une unité.»

19° A peine est-il besoin de faire remarquer qu'il peut exister des itinéraires \mathfrak{B} qui ne fournissent aucun point $\bar{\xi}$. Ils sont constitués par des zéros communs aux $N+1$ fonctions F_j du 1°.

Par exemple, pour $r=2$, cas [3], supposons que les surfaces ordinaires $F_j(y, x_1, x_2) = 0$, $F_j = \text{polynôme}$, aient une courbe g , issue de l'origine, commune. Un itinéraire \mathfrak{B} , qui coïncide avec g , ne fournit aucun point limite $\bar{\xi}$.

20° J'espère traiter dans un travail ultérieur le »problème des itinéraires \mathfrak{B} » c'est à dire les questions suivantes:

I. un point $\bar{\xi}$ étant donné sur Ω_r construire tous les itinéraires qui fournissent $\bar{\xi}$;

II. étudier comment varient ces itinéraires, lorsque $\bar{\xi}$ se déplace sur Ω_r .

Lyon le 1^{er} mai 1897.

A SPECIAL CASE OF DIRICHLET'S PROBLEM FOR TWO DIMENSIONS

BY

J. C. KLUYVER

of LEYDEN.

In a posthumous paper¹ of Riemann some indications are given about the construction of a real harmonic function W in a plane with several circular holes, the function W taking assigned real values on each of the circular rims. Riemann's treatment of the problem is based on the theory of conformal representation. The given area is to be represented conformally on part of a Riemann surface, bounded by rectilinear rims, and then the desired function W can be readily found by means of an appropriate integral of the third kind. In 1877 the conformal representation of the plane with the holes was discussed anew by Schottky², who arrived at a solution, depending on certain transcendental functions, not altered by the linear substitutions of a special discontinuous group, that was afterwards called by Poincaré³ the symmetrical Kleinian group of the third family. In a second memoir Schottky⁴ returned to this class of Kleinian functions and gave a full and ample discussion of their properties. By their means it is possible to treat in a direct way, and without having recourse to a previous mapping, the original Dirichlet's problem for the perforated plane.

¹ *Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen.* Ges. W., 2nd Ed., p. 440.

² *Über conforme Abbildungen mehrfach zusammenhangender ebener Flächen.* Journal f. r. u. a. Math., t. 83, p. 300.

³ *Mémoire sur les groupes Kleinéens.* Acta Mathematica, t. 3, p. 49.

⁴ *Über eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt.* Journal f. r. u. a. Math., t. 101, p. 227.

Acta mathematica. 21. Imprimé le 7 septembre 1897.

In what follows I propose to show, that by the use of Schottky's functions we can obtain for the required potential function a determinate analytic expression, which even lends itself more or less to actual calculation. Moreover from the form the function W assumes, it will appear that, in order to solve the general problem, it suffices to consider two special cases only: 1° the case of a single hole, 2° the case, wherein on each rim the function W is equal to a determinate constant.

Before entering however into further developments, it will be necessary to make some statements about Schottky's results and to give a short description of some of the particular functions, he was the first to introduce into analysis¹.

1. *Schottky's region T and the Kleinian group belonging to it.* In the plane of the complex variable x there are drawn p circumferences K_1, K_2, \dots, K_p with the radii R_1, R_2, \dots, R_p and the centres a_1, a_2, \dots, a_p . No two of these circles must intersect and each of them must lie wholly above the axis XX of real quantities. Reflecting these p circles upon the axis XX , a further set of p circles K_1', K_2', \dots, K_p' is obtained, their centres a_1', a_2', \dots, a_p' are conjugate to a_1, a_2, \dots, a_p . It is the part of the plane outside these $2p$ circles that formed the base of Schottky's investigations and which we designate henceforth as Schottky's region T . Occasionally we will have to regard as a circle the axis XX itself, and as such we shall call it the circle K_q , where q stands for $p+1$.

Associated with the region T , of connectivity $2p$, there is an infinite discontinuous group I of linear substitutions, p of these being fundamental and each derived from one of the p pairs of conjugate circles K_k and K_k' . So, for instance, supposing x to be a point in T , the relation

$$x_k = a_k + \frac{R_k^2}{x - a_k} = f_k(x)$$

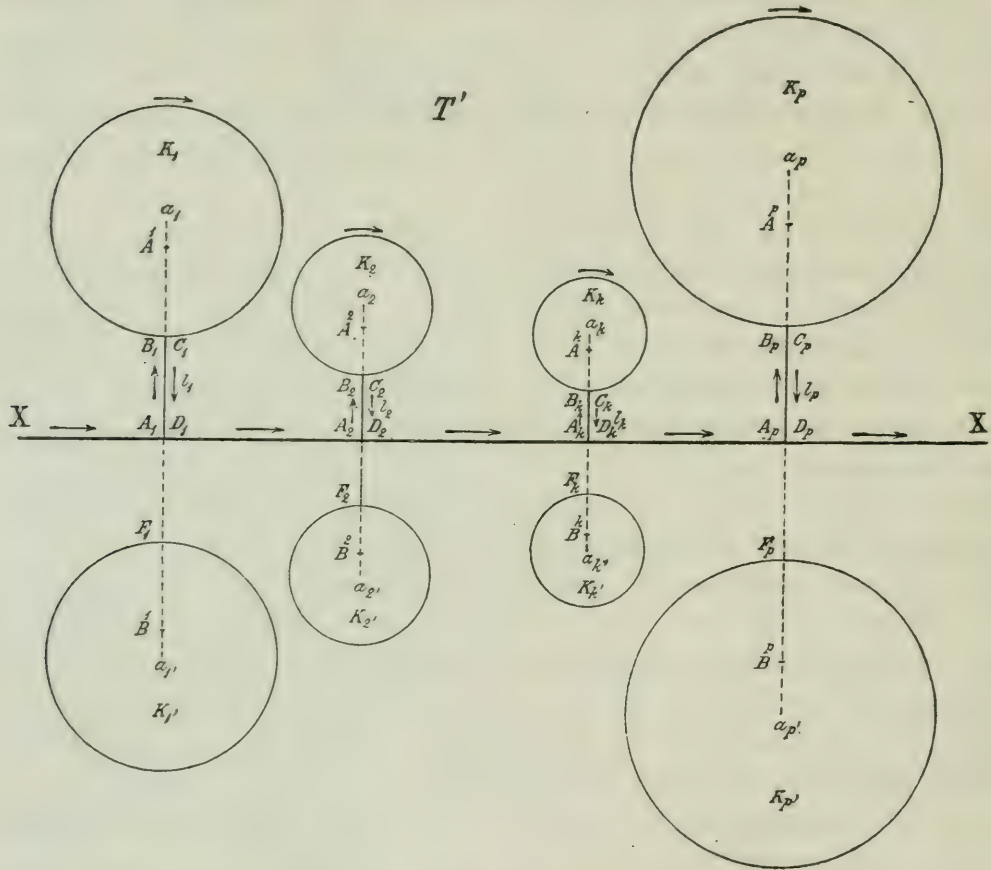
defines a point x_k , interior to the circle K_k , and by this substitution f_k

¹ Reference should be given here to the treatise of H. F. BAKER: *Abel's theorem and the allied theory, including the theory of the theta functions*. In Chapter XII of this volume the author gives an account of Schottky's investigations and explains the analogy between Schottky's theory and that of a Riemann surface.

the initial region T is transformed into another one T_k , of the same connectivity, and bounded by the same number of circular rims. One of these rims is the circumference K_k , along this boundary the regions T and T_k are contiguous.

It is evident that the thus defined hyperbolic substitution f_k is geometrically equivalent to a reflection upon XX or K_q , followed by a second reflection upon K_k , and it is also easily seen that this pair of reflections changes the circle K_k into the conjugate one $K_{\bar{k}}$, so that corresponding points on these two circumferences have conjugate complex affixes. The inverse of the substitution f_k , which we shall denote by $f_{\bar{k}}$, has the effect of changing T_k again into T , thereby transforming the last named region into $T_{\bar{k}}$, a new region, wholly enclosed by $K_{\bar{k}}$ and contiguous to T along this circumference. By composition of a finite or infinite number of the foregoing fundamental substitutions f_1, f_2, \dots, f_p , and of their inverses $f_{\bar{1}}, f_{\bar{2}}, \dots, f_{\bar{p}}$, all the various substitutions f_α of the group T are obtained. We will call α the *mark* of the substitution f_α , employing always a greek letter when the substitution is not necessarily fundamental but perhaps composite. Thus then, α denotes an aggregate or symbolical product of the fundamental marks $1, 2, \dots, p, 1', 2', \dots, p'$, and if, for instance, we have $\alpha = 1'245'$, the loxodromic substitution f_α implies the successive application of the fundamental substitutions $f_{5'}, f_4, f_2$ and $f_{1'}$. In compliance with the order, in which these operations are to be performed, we will call $5'$ the first and $1'$ the last *factor* of the composite mark α . By inverting the order of the factors and by interchanging accented and non-accented marks, we obtain the mark $\alpha' = 54'2'1$ of the substitution $f_{\alpha'}$ that is the inverse of f_α . If we omitted however to invert the order of the factors, there would result the mark $\alpha_0 = 12'4'5$, which shall be called the *conjugate* of α , and we may obviously infer that conjugate substitutions, applied to a pair of conjugate points in T , change them again into a pair of conjugate points. All substitutions of the group T can be arranged by attending to the number of fundamental marks or factors, that enter into the composite mark α . First of all we have the identical substitution followed by the $2p$ substitutions $f_1, f_2, \dots, f_p, f_{\bar{1}}, f_{\bar{2}}, \dots, f_{\bar{p}}$ each with a single mark, then come the $2p(2p-1)$ substitutions of the second order, each compounded from two fundamental substitutions, and so on. Although it is scarcely possible to form a mental

image of the geometrical configuration, generated by the group, it is analytically evident that all the regions T_a , derived from the fundamental region T , are bounded by $2p$ circumferences, and that no two of them will overlap. Together they cover the complete plane, we started with, with exception of certain limiting points, that are not reached as transformations of points in T , whatever finite series of substitutions we apply,



and which remain therefore always excluded from all the regions, whereinto the plane is divided. Every substitution f_a gives rise to a pair of such points, for if we agree to call $\overset{a}{A}$ and $\overset{a}{B}$ its double points, that is, if we define $\overset{a}{A}$ and $\overset{a}{B}$ by the equations

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{a^n}(x) = \overset{a}{A}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{a'^n}(x) = \overset{a}{B},$$

it is at once apparent, that no point whatever in T is changed into one of them, by subjecting it to a finite number of substitutions.

Of particular importance are the double points A, B of the fundamental substitutions f_k . The three circles $K_k, K_{k'}$ and K_q belong to a system of circles having a common radical axis, and the limiting points or foci of this system are precisely the points A and B . Hence, the latter are each other's inverses with regard to K_q and their affixes are conjugate complexes.

We have already remarked that every fundamental substitution f_k is equivalent to a pair of inversions, the first with respect to K_q , the second with respect to K_k , and from this remark it is at once apparent, that any composite substitution f_a can always be replaced by an *even* number of inversions with regard to the $p+1$ circles $K_1, K_2, \dots, K_p, K_q$. For our purpose it will be convenient occasionally to resolve the substitution f_a into its component inversions, therefore we will represent such an inversion by a distinct symbol. As such we choose doubly-accented marks, to prevent confusion with the substitutions of I . So, for instance, we will denote by $x_{1''3''4''6''}$ the point derived from x by four successive inversions with regard to the circles K_6, K_4, K_3, K_1 . On the other hand, if we made use of the hitherto employed notation, the same point $x_{1''3''4''6''}$ would be designated by $x_{13'46'}$, for the four pairs of inversions $q''6''$, $4''q''$, $q''3''$, $1''q''$ give rise successively to the four substitutions $6', 4', 3', 1$.

1. *Functions existing in Schottky's region.* We proceed to give a short description of some of Schottky's functions, existing in the region T . In the first place we mention the expression

$$(xy; \xi\eta) = \prod_a \frac{x - \xi_a}{x - \eta_a} : \frac{y - \xi_a}{y - \eta_a},$$

the multiplication extending over all the substitutions of I , fundamental and composite. It was proved by Schottky, though his proof, as he himself points out, is still liable to some limitations, that the above infinite product is really convergent and that in T it can be considered as an analytic function $\varphi(x)$ of the variable x . From the form of the primary factor we conclude, that $(xy; \xi\eta)$ obeys the equations

$$(xy; \xi\eta) = (yx; \eta\xi) = (\xi\eta; xy),$$

moreover it is not difficult to see, that $\log(xy; \xi\eta)$ or, as we shall write it, $\log \varphi(x)$ possesses in T only the two logarithmic infinities ξ and η , the function $\log \varphi(x)$ increasing with $\pm 2\pi i$, each time the variable x describes a circuit enclosing either ξ or η .

Intimately connected with $\varphi(x)$ is the function

$$E_\mu(x) = \prod_{\alpha} \frac{x - A_\alpha}{x - B_\alpha},$$

not depending upon some parameter. It must be noted, that in this expression the variable mark α does not refer to all the substitutions of F without exception, excluded are all marks α , that are of the form $\beta\mu$ or $\beta\mu'$. The function $E_\mu(x)$ has neither zero's nor infinities in T , its essential property consists in the multiplication-theorem:

$$E_{\alpha\beta}(x) = E_{\beta\alpha}(x) = E_\alpha(x) \cdot E_\beta(x),$$

from which it is immediately inferred that only the p fundamental functions $E_1(x), E_2(x), \dots, E_p(x)$ need be considered, since, by arranging these in products, all similar functions with composite marks can be constructed.

Reverting again to logarithms, it can be shewn, that $\log E_k(x)$, everywhere finite in T , has its value increased by $\pm 2\pi i$, whenever the variable x describes a closed path round one of the circles K_k and $K_{k'}$.

If we subject the argument of the foregoing functions $\varphi(x)$ and $E_k(x)$ to any substitution of Γ the result is very remarkable. So it is found that after the substitution the function $E_k(x)$ is reproduced, save as to a determinate constant factor. Otherwise expressed we have

$$E_k(x_\alpha) = E_k(x) \cdot E_{k,\alpha}.$$

As for the constant $E_{k,\alpha}$, introduced here, supposing $\alpha = \beta\gamma$, it satisfies the relation

$$E_{k,\alpha} = E_{\alpha,k} = E_{k,\beta} \cdot E_{k,\gamma}.$$

Again it becomes apparent that we can disregard the composite marks and that all constants $E_{\alpha,\beta}$ are simply products of similar quantities $E_{h,k}$,

each of the latter corresponding to a pair of fundamental substitutions. By differentiating the relation between $E_h(x_k)$ and $E_h(x)$ we get

$$d \log E_h(x_k) = d \log E_h(x),$$

hence, with respect to I' , the differential $d \log E_h(x)$ is automorphic. A similar result holds for the function $\varphi(x)$. Application of the substitution f_a gives

$$\varphi(x_a) = (x_a, y; \xi \eta) = \varphi(x) \cdot \frac{E_a(\xi)}{E_a(\eta)},$$

and therefore again

$$d \log \varphi(x_a) = d \log \varphi(x).$$

3. *Rim values of $E_k(x)$ and $\varphi(x)$.* It is necessary, at the present stage, to make some statements about the nature of the values, the functions $E_k(x)$ and $\varphi(x)$ acquire on the rims of the region T . Commencing with $E_k(x)$, we observe that in the infinite product

$$E_k(x) = \prod_a^k \frac{x - A_a}{x - B_a}$$

we can combine the primary factors, due to every pair of conjugate substitutions f_a and f_{a_0} , so that we have, writing down separately the leading factor corresponding to the identical substitution,

$$E_k(x) = \frac{x - A}{x - B} \prod_a^k \left[\frac{x - A_a}{x - B_a} \cdot \frac{x - A_{a_0}}{x - B_{a_0}} \right].$$

Now remembering that the conjugate points A and B , subjected to conjugate substitutions, transform again into conjugate points, it plainly appears that, for real values of the variable x , the function $E_k(x)$ is of modulus unity. Hence on the axis XX , otherwise said on the circle K_q , the function $\log E_k(x)$, and also its differential $d \log E_k(x)$, is purely imaginary. As for the rims of the region T , we may draw a similar conclusion in the following manner. Supposing x and x_0 to be conjugate complexes, what we shall indicate by writing $x \neq x_0$, we have in general

$$i \log E_k(x) \neq i \log E_k(x_0), \dots \pmod{2\pi}$$

since $i \log E_k(x)$ is real for all real values of x . Now, if we make x describe the rim K_h, x_0 moves on K_h , and both variables are connected by the relation $x = f_h(x_0)$, hence we have simultaneously

$$i \operatorname{dlog} E_k(x) \neq i \operatorname{dlog} E_k(x_0),$$

$$\operatorname{dlog} E_k(x) = \operatorname{dlog} E_k(x_0),$$

and these equations can not be satisfied, unless $\operatorname{dlog} E_k(x)$ is purely imaginary on the rim K_h .

Another fact of equal importance should be noticed here. Taking again x on K_h , and therefore x_0 on K_h , it follows from the simultaneous relations

$$i \log E_k(x) \neq i \log E_k(x_0), \dots \pmod{2\pi}$$

$$\log \frac{E_k(x)}{E_k(x_0)} = \log E_{h,k},$$

that the p^2 constants $E_{h,k}$ have real and positive values. Hence one of the values of $\log E_{h,k}$ is purely real, we shall denote it henceforth by $2\tau_{h,k} = 2\tau_{k,h}$; and it is not difficult to prove, that the complete set of the p^2 constants $\tau_{h,k}$ may serve as a system of moduli for a p -tuple theta-function.

Quite the same reasoning does apply to the function $\varphi(x) = (xy; \xi\eta)$, if only the parameters y, ξ, η are fixed in a particular manner. Supposing y to be real, ξ and η to be conjugate complexes, we can easily see that, for real values of x , we have always

$$\operatorname{mod.} \varphi(x) = 1.$$

For in writing down the infinite product represented by $\varphi(x)$, we may again combine the factors corresponding to a pair of conjugate substitutions, and having

$$\varphi(x) = \left[\frac{x - \xi}{x - \eta} : \frac{y - \xi}{y - \eta} \right] \prod_a \left[\frac{x - \xi_a}{x - \eta_{a_0}} : \frac{x - \xi_{a_0}}{x - \eta_a} \right] : \left[\frac{y - \xi_a}{y - \eta_{a_0}} : \frac{y - \xi_{a_0}}{y - \eta_a} \right],$$

the validity of the above assertion is obvious. Accordingly the differential $\operatorname{dlog} \varphi(x)$ takes only purely imaginary values as x moves on the

axis XX, and the same conclusion holds, when x describes one of the rims. For, in the latter case, we have at the same time

$$i \operatorname{dlog} \varphi(x) \neq i \operatorname{dlog} \varphi(x_0),$$

and
$$\operatorname{dlog} \varphi(x) = \operatorname{dlog} \varphi(x_0),$$

and these equations necessarily involve a purely imaginary value of $\operatorname{dlog} \varphi(x)$.

4. *Integration along the rims.* The solution of the proposed Dirichlet's problem will be found to depend mainly on the value of certain curvilinear integrals, taken along the different circumferences K_k , therefore it will be useful to deduce some inferences concerning these integrals.

We assume that with every point x on the rim K_k there is associated a determinate real and finite quantity, and though this quantity is in the ordinary sense not a function of the variable x , it will lead to no misconception, if we denote the succession of these real values on the rim K_k by the symbol $\phi_k(x)$.

We now consider the integral

$$J_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{K}_k} \phi_k(x) \operatorname{dlog} \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{K}_k} \phi_k(x) dx \sum_a \left[\frac{1}{x - \xi_a} - \frac{1}{x - \eta_a} \right],$$

taken along K_k in that direction, that leaves the region T to the left. If the parameters ξ and η of the function $\varphi(x)$ are chosen quite arbitrarily, the integral J_k is a complex quantity, its real part however is in all cases capable of an easy interpretation.

In order to obtain this real part we substitute into the integral

$$x = a_k + R_k e^{i\theta}, \quad \xi_a = a_k + r_a e^{i\nu_a}, \quad \eta_a = a_k + s_a e^{i\nu_a},$$

and so we get without difficulty

$$\Re J_k = \sum_a \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_a^2 - R_k^2) \phi_k(x) d\theta}{r_a^2 + R_k^2 - 2r_a R_k \cos(\theta - \nu_a)} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(s_a^2 - R_k^2) \phi_k(x) d\theta}{s_a^2 + R_k^2 - 2s_a R_k \cos(\theta - \nu_a)} \right].$$

Now to the integrals occurring here we can attach a definite meaning. In fact, supposing the circle K_k to be the only hole in the plane of the variable x , there exists in that plane a real uniform and finite potential function U_k with the boundary values $\phi_k(x)$ on the rim K_k . In case ξ_a lies outside K_k , it follows from the ordinary theory that the value $U_k(\xi_a)$ of U_k at the point ξ_a is equal to

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_a^2 - R_k^2) \phi_k(x) d\theta}{r_a^2 + R_k^2 - 2r_a R_k \cos(\theta - u_a)},$$

whereas the same integral indicates in case of an interior point ξ_a the value

$$-U_k(\xi'_a),$$

ξ'_a being the inverse of ξ_a with regard to K_k . Hence we may write

$$\Re J_k = \frac{1}{2} \sum_a [U_k(\xi_a) - U_k(\eta_a)],$$

if we only agree to replace in the above series every interior point by its reflection upon K_k , changing thereby at the same time the sign of the corresponding value of U_k .

The same reasoning can be applied to the integral

$$J_q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{K}_q} \phi_q(x) d\log \varphi(x),$$

taken along the axis XX , the positive halfplane lying to the left. In the positive halfplane without any holes we can imagine the real potential function U_q , taking on the axis XX the assigned rim values $\phi_q(x)$, and by introducing this function U_q , we shall find as before

$$\Re J_q = \frac{1}{2} \sum_a [U_q(\xi_a) - U_q(\eta_a)].$$

The function U_q being however only defined in the upper halfplane, every point in the lower halfplane must be replaced by the conjugate one, and the corresponding value of U_q must have its sign changed.

5. *Dirichlet's problem for the upper half T' of Schottky's region.* By the preceding deductions we are now enabled to treat Dirichlet's problem for the upper half T' of Schottky's region with its q circular boundaries $K_1, K_2, \dots, K_p, K_q$, that is, we can construct in this area a real, uniform and finite potential function W , satisfying given boundary conditions. This function W we assume to be the real part of an unknown function $V(x)$ of the complex variable x , everywhere finite in T' . Now as W must be uniform in T' , the moduli of periodicity of $V(x)$ must be either zero or purely imaginary quantities, otherwise stated, if the variable x describes a circuit enclosing one of the holes, say K_k , the initial and the final value of $V(x)$ can only differ by an imaginary constant S_k .

Starting with the thus characterised function $V(x)$, the potential function W can be obtained, as in the case of a single hole, in the form of a definite integral. In fact, it will be found that the construction of the required potential can be based upon the consideration of the integral

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi i} \int V(x) [\operatorname{dlog} \varphi(x) - h_1 \operatorname{dlog} E_1(x) - h_2 \operatorname{dlog} E_2(x) - \dots - h_p \operatorname{dlog} E_p(x)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int V(x) dF(x), \end{aligned}$$

wherein h_1, h_2, \dots, h_p denote certain real coefficients, depending upon the parameters ξ and η of the function $\varphi(x)$, it being moreover understood that ξ and η are to be conjugate points, the former belonging to T' . In order to fix a suitable path of integration, we draw from each of the p rims K_1, K_2, \dots, K_p in T' a rectilinear cross-cut l_k (see the figure) to the axis XX . So the resolved region T' becomes simply connected and throughout this region the one-valuedness of the subject of integration is secured. Hence integrating along the complete rim: $XA_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2, \dots, D_pX$, we get, since ξ is the only pole of the integrand in T' ,

$$\begin{aligned} J = V(\xi) &= J_{XA_1} + J_{D_1A_2} + J_{D_2A_3} + \dots + J_{D_pX} \\ &\quad + J_{B_1C_1} + J_{B_2C_2} + J_{B_3C_3} + \dots + J_{B_pC_p} \\ &\quad + (J_{A_1B_1} - J_{D_1C_1}) + (J_{A_2B_2} - J_{D_2C_2}) + \dots + (J_{A_pB_p} - J_{D_pC_p}). \end{aligned}$$

Now, for our purpose, the real parts at both sides of this equation need only be considered, and as such we find at the left hand side the value $W(\xi)$, the function W assumes at the point ξ . At the right-hand side we must consider separately the parts contributed by the rims of the unresolved area T' , and those relative to the cross-cuts l_k . Commencing with the axis XX , we remark that along that rim the differential $dF(x)$ is imaginary, hence only the real part of $V(x)$ must be retained, that is, integrating along XX we must replace the function $V(x)$ by the assigned rim values $\phi_q(x)$ of the potential W . Thus then, contracting the sum

$$J_{XA_1} + J_{D_1A_2} + J_{D_2A_3} + \dots + J_{D_pX}$$

into a unique integral, we may write

$$\Re[J_{XA_1} + J_{D_1A_2} + J_{D_2A_3} + \dots + J_{D_pX}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{K}_q} \phi_q(x) dF(x).$$

The same argument holds for the integrals $J_{B_kC_k}$ contributed by the circumferences K_k . Again we shall have

$$\Re[J_{B_kC_k}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{K}_k} \phi_k(x) dF(x)$$

and so there remain only the integrals along the cross-cuts. Now along the cross-cut l_k the values of the integrand at opposite places have a difference equal to

$$S_k \frac{dF(x)}{dx}$$

and hence we have

$$J_{A_kB_k} - J_{D_kC_k} = \frac{S_k}{2\pi i} [F(x)]_{x=A_k}^{x=B_k}.$$

At the lower limit A_k the function $F(x)$ has been shewn to have an imaginary value, therefore we may put

$$\Re[J_{A_kB_k} - J_{D_kC_k}] = 0,$$

on condition that we subject the as yet undetermined coefficients λ to the relation

$$0 = \Re[\log(xy; \xi\eta) - \lambda_1 \log E_1(x) - \lambda_2 \log E_2(x) - \dots - \lambda_p \log E_p(x)]_{x=B_k}.$$

In all we get p of such relations; supposing them satisfied, the value $W(\xi)$ of the potential function takes the form

$$W(\xi) = \sum_{k=1}^{k=q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{K}_k} \phi_k(x) [\operatorname{dlog}(xy; \xi\eta) - \lambda_1 \operatorname{dlog} E_1(x) - \lambda_2 \operatorname{dlog} E_2(x) - \dots - \lambda_p \operatorname{dlog} E_p(x)].$$

This expression can be transformed in the following manner. From the equation

$$(xy; \xi\eta_k) = (xy; \xi\eta) \cdot \frac{E_k(y)}{E_k(x)},$$

or as we write it

$$\varphi_k(x) = \varphi(x) \cdot \frac{E_k(y)}{E_k(x)},$$

we deduce

$$\operatorname{dlog} E_k(x) = \operatorname{dlog} \varphi(x) - \operatorname{dlog} \varphi_k(x).$$

This relation enables us to eliminate from the foregoing expression of $W(\xi)$ the functions $E_k(x)$, and in this way we get

$$W(\xi) = \sum_{k=1}^{k=q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{K}_k} \phi_k(x) [(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_p) \operatorname{dlog} \varphi(x) + \lambda_1 \operatorname{dlog} \varphi_1(x) + \lambda_2 \operatorname{dlog} \varphi_2(x) + \dots + \lambda_p \operatorname{dlog} \varphi_p(x)].$$

Here, making use of the results established in art. 4, we can introduce the auxiliary potentials U_k considered there. U_k is a real uniform and finite potential function existing in the simply connected area outside the circular hole K_k , and fully determined in this region by the rim values $\phi_k(x)$, it takes on the only rim. For arbitrary values of the parameter ξ and η of $\varphi(x)$ we have established the relation

$$\Re \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{K}_k} \phi_k(x) \operatorname{dlog} \varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \{U_k(\xi_{\alpha}) - U_k(\eta_{\alpha})\},$$

hence we may now affirm that

$$W(\xi) =$$

$$\frac{1}{2}(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_p) \sum_{k=1}^{k=q} \left[\sum_{\alpha} \{ U_k(\xi_{\alpha}) - U_k(\eta_{\alpha}) \} \right] + \frac{1}{2} \lambda_1 \sum_{k=1}^{k=q} \left[\sum_{\alpha} \{ U_k(\xi_{\alpha}) - U_k(\eta_{\alpha 1}) \} \right] \\ + \frac{1}{2} \lambda_2 \sum_{k=1}^{k=q} \left[\sum_{\alpha} \{ U_k(\xi_{\alpha}) - U_k(\eta_{\alpha 2}) \} \right] + \dots + \frac{1}{2} \lambda_p \sum_{k=1}^{k=q} \left[\sum_{\alpha} \{ U_k(\xi_{\alpha}) - U_k(\eta_{\alpha p}) \} \right].$$

The above expression acquires a perfect symmetry, if we resolve every substitution f_{α} of the group Γ into its component inversions with regard to the rims of T' , remembering at the same time that, ξ and η being conjugate points, we may write $\xi_{q''}$ for η , $\xi_{k''}$ for η_k .

Let the mark α'' denote a succession of an *even* number (zero included) of inversions with respect to $K_1, K_2, \dots, K_p, K_q$, then using λ_q to denote

$$1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_p,$$

we shall have finally

$$W(\xi) = \sum_{h=1}^{h=q} \left[\frac{1}{2} \lambda_h \sum_{k=1}^{k=q} \left[\sum_{\alpha''} \{ U_k(\xi_{\alpha''}) - U_k(\xi_{\alpha'' h''}) \} \right] \right].$$

Meanwhile it is to be distinctly understood that when a point $\xi_{\beta''}$, occurring in the above serie, is interior to the hole K_k , the symbol $U_k(\xi_{\beta''})$ denote the value of

$$- U_k(\xi_{k' \beta''}),$$

where $\xi_{k' \beta''}$ is the reflection of $\xi_{\beta''}$ upon K .

6. *The coefficients λ .* Before we proceed to examine in what manner the values of the coefficients λ may be obtained, we wish to shew that they are in a simple and characteristic way related to the region T' .

To this end we will consider the case that the given rim values of W were zero on all rims but one, say K_s , and that the rim value on K_s was throughout equal to unity.

First, we have now

$$\sum_{\alpha''} \{ U_s(\xi_{\alpha''}) - U_s(\xi_{\alpha'' h''}) \} = 0,$$

when h is distinct from s . In fact, whatever α'' may be, the points $\xi_{\alpha''}$ and $\xi_{\alpha''h''}$ are always simultaneously within or without the circle K_s , and $U_s(\xi_{\alpha''})$ and $U_s(\xi_{\alpha''h''})$ are therefore at the same time equal to -1 or to $+1$.

Next, we have

$$\sum_{\alpha''} \{ U_s(\xi_{\alpha''}) - U_s(\xi_{\alpha''s''}) \} = 2.$$

For, as before, each term of the series, save the first, vanishes, whereas we obtain for the first term, corresponding to $\alpha'' = 0$,

$$U_s(\xi) - U_s(\xi_s) = 2 U_s(\xi) = 2.$$

In the remaining series

$$\sum_{\alpha''} \{ U_k(\xi_{\alpha''}) - U_k(\xi_{\alpha''h''}) \},$$

where k is distinct from s , all the potentials U_k are separately zero, hence for the very special case under consideration we find

$$W(\xi) = \lambda_s.$$

Thus then, we may enunciate that the coefficient λ_s indicates the value of the potential function W , whenever W is zero on all the rims, except on K_s , whereon it is equal to unity.

Moreover this interpretation of the λ 's implies that the system of linear equations

$$\Re[\log(xy; \xi\eta) - \lambda_1 \log E_1(x) - \lambda_2 \log E_2(x) - \dots - \lambda_p \log E_p(x)]_{x=B_k} = 0,$$

$$(k = 1, 2, \dots, p)$$

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p + \lambda_\eta,$$

which served originally to define them, is always capable of a definite solution. To bring these equations in a form somewhat better fitted for actual calculation, we proceed as follows.

Let, in the diagram of art. 5, F_k be the reflection of B_k upon XX , then we have simultaneously

$$i \log(xy; \xi\eta)_{x=B_k} \equiv i \log(xy; \xi\eta)_{x=F_k}, \dots \pmod{2\pi}$$

and

$$\log(xy; \xi\eta)_{x=B_k} = \log(xy; \xi\eta)_{x=F_k} + \log \frac{E_k(\xi)}{E_k(\eta)}$$

whence it is inferred that

$$\Re \log(xy; \xi\eta)_{x=B_k} = \frac{1}{2} \log \frac{E_k(\xi)}{E_k(\eta)}.$$

Since the points ξ and η are conjugate, the value of the right hand side is depending upon ξ alone, accordingly we will henceforth represent it by $L_k(\xi)$.

Reverting to the points B_k and F_k and the corresponding values of $\log E_k(x)$, we have in the same way

$$i \log E_h(x)_{x=B_k} \equiv i \log E_h(x)_{x=F_k}, \dots \pmod{2\pi}$$

and

$$\log E_h(x)_{x=B_k} = \log E_h(x)_{x=F_k} + \log E_{h,k},$$

so that

$$\Re \log E_h(x)_{x=B_k} = \frac{1}{2} \log E_{h,k} = \tau_{h,k}.$$

Consequently the equations, from which the λ 's are to be solved, may be written in the form

$$L_k(x) = \tau_{1,k} \lambda_1 + \tau_{2,k} \lambda_2 + \tau_{p,k} \lambda_p,$$

$$(k = 1, 2, \dots, p)$$

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p + \lambda_q.$$

The solution is possible as soon as the values of the L 's and of the τ 's are known, and we will now indicate how these values can be found by means of convergent infinite products.

Owing to the definition of $L_k(\xi)$, it follows that

$$e^{2L_k(\xi)} = \frac{E_k \xi}{E_k \eta} = \left[\frac{\xi - A}{\xi - B}; \frac{\eta - A}{\eta - B} \right] \prod_a \left[\frac{\xi - A_a}{\xi - B_a}; \frac{\eta - A_a}{\eta - B_a} \right],$$

the primary factor of the infinite product taking the form of an anharmonic ratio $\left[\xi\eta; A_a B_a \right]$, and the variable mark a indicating all possible

substitutions of I' , save those that have a mark of the form βk or $\beta k'$. Again, since ξ and η are conjugate complexes, the two factors $\left[\xi\eta; A_a^k B_a^k\right]$ and $\left[\xi\eta; A_{a_0}^k B_{a_0}^k\right]$, corresponding to a pair of conjugate marks α and α_0 , are also conjugate complex quantities, hence, if we agree to denote henceforth by $\left[\xi\eta; A_a^k B_a^k\right]$ the absolute value of the anharmonic ratio, we arrive, by extracting the square root, to a result of the form

$$e^{L_k(\xi)} = \left[\xi\eta; A B\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{\beta} \left[\xi\eta; A_{\beta}^k B_{\beta}^k\right],$$

the product extending over all marks β , the first factor of which is either $1, 2, 3, \dots, (k-1), (k+1), \dots, (p-1)$ or p .

The last step is to introduce the inversions instead of the substitutions, and so we find finally

$$e^{L_k(\xi)} = \left[\xi\xi_{q''}; A B\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{\gamma''} \left[\xi\xi_{q''}; B_{\gamma''}^k A_{\gamma''}^k\right],$$

where γ'' designates a product of an *odd* number of the marks $1'', 2'', \dots, p'', q''$, the first factor being neither k'' nor q'' .

The constants $\tau_{h,k}$ are expressible by a similar expansion. In fact, whenever the point ξ approaches indefinitely the rim K_h , we have

$$L_k(\xi) = \frac{1}{2} \log \frac{E_k(\xi)}{E_k(\eta)} = \frac{1}{2} \log E_{h,k} = \tau_{h,k},$$

and so perhaps the easiest way to evaluate $\tau_{h,k}$ is to evaluate $L_k(\xi)$ for some point ξ arbitrarily chosen on the rim K_h .

7. *Summary of results obtained for the region T' .* The following is a summary of the results that have been obtained in the preceding articles, relative to Dirichlet's problem for the upper half T' of Schottky's region:

I. The required potential function W is given by the general formula

$$W(\xi) = \sum_{h=1}^{h=q} \left[\frac{1}{2} \lambda_h \sum_{k=1}^{k=q} \left[\sum_{a''} \{ U_k(\xi_{a''}) - U_k(\xi_{a''} h'') \} \right] \right],$$

the mark α'' designating an *even* number of reflections, the potential function U_k being defined as in art. 4.

II. The q coefficients λ , entering in the above formula, are determined by the p linear equations

$$L_k(\xi) = \tau_{1,k} \lambda_1 + \tau_{2,k} \lambda_2 + \dots + \tau_{p,k} \lambda_p, \\ (k = 1, 2, \dots, p)$$

and by the supplementary condition

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p + \lambda_q.$$

III. The value of $L_k(\xi)$ is given by the equation

$$e^{L_k(\xi)} = \left[\tilde{\xi} \tilde{\xi}_{q''}; A^k B^k \right]^{\frac{1}{2}} \prod_{\gamma''} \left[\tilde{\xi} \tilde{\xi}_{q''}; B_{\gamma''}^k A_{\gamma''}^k \right],$$

where γ'' is compounded from an *odd* number of inversions, its first factor being neither k'' nor q'' . In order to find $\tau_{h,k}$, we take ξ to be a point on K_h and have then $\tau_{h,k} = L_k(\xi)$.

An additional remark suggests itself. The value of $W(\xi)$ has been found to involve solely the λ 's and the auxiliary potentials U_k . Hence, remembering the definition of λ_k and of U_k , we have made good, as far as concerns the region T' , the assertion, made in the beginning, that Dirichlet's problem can be completely solved, when a solution is found: 1° in case the rim values for each rim reduce themselves to a constant, 2° in case there is but one hole.

8. *Verification of the preceding solution.* In establishing a definite expression for $W(\xi)$, we took it for granted that there really existed in the region T' a potential function, obeying given boundary conditions. Therefore a verification of our result is necessary, in other words, we have to shew that, as soon as the point ξ approaches indefinitely a point x on one of the rims, say K_m , the value of $W(\xi)$ tends to the corresponding rim value $\phi_m(x)$.

Now, considering the quantities $L_k(\xi)$, we have immediately

$$\lim_{\xi \rightarrow x} L_k(\xi) = \tau_{m,k} \\ (k = 1, 2, \dots, p)$$

and for this special value of $L_k(x)$ it is inferred from the equations II, art. 7, that $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_p, \lambda_q$ become vanishing quantities and that λ_m tends to unity. Hence the general formula I, art. 7, is somewhat simplified, we may conclude

$$\lim_{\xi=x} W(\xi) = \lim_{\xi=x} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=q} \left[\sum_{a''} \{ U_k(\xi_{a''}) - U_k(\xi_{a''m''}) \} \right].$$

It is easily proved that in this aggregate of infinite series every series

$$\sum_{a''} \{ U_k(\xi_{a''}) - U_k(\xi_{a''m''}) \},$$

where k is distinct from m , will ultimately vanish. For as ξ approaches x from the outside of K_m , the point $\xi_{m''}$ will tend to the same point x from the inside of K_m . Hence the points $\xi_{a''}$ and $\xi_{a''m''}$ ultimately will unite, so that each term of the above series vanishes separately.

We may deal in the same way with the remaining series

$$\sum_{a''} \{ U_m(\xi_{a''}) - U_m(\xi_{a''m''}) \}.$$

Again the values of $U_m(\xi_{a''})$ and $U_m(\xi_{a''m''})$ will tend to the same limit. An exception occurs however. According to the definition of the potential U_k , we find for the leading term, corresponding to the identical substitution,

$$U_m(\xi) - U_m(\xi_{m''}) = 2 U_m(\xi)$$

and hence we have

$$\lim_{\xi=x} W(\xi) = \lim_{\xi=x} U_m(\xi).$$

But from the ordinary theory of Dirichlet's problem for the plane with a single circular hole, it is known that $U_m(\xi)$ changes continuously into the boundary value $\phi_m(x)$, therefore we have also

$$\lim W(\xi) = \phi_m(x),$$

and it is proved that the potential function W , as defined in I, art. 7, satisfies indeed the assigned boundary conditions.

9. *Dirichlet's problem for a plane with $q = p + 1$ circular holes.*

In the preceding investigations one of the rims K_q was a circle of infinite radius, there remains to shew that this circumstance is totally irrelevant. In fact, when we have to solve Dirichlet's problem for a plane S with q circular holes, it is always possible, by means of a proper linear substitution, that changes one of the rims into a right line, to represent the area S conformally upon the region T' , and as we are able to solve the problem for T' , we can get in this way the solution for S . However it is easily seen that the previous mapping of S on T' is entirely superfluous, in as much the quantities, entering into our formulae, are either potential functions or anharmonic ratios, not altered by linear transformation. Thus then, if among the given circumferences in S we have chosen one as K_q , we have only to construct the p pairs of limiting points A^k and B^k , each pair belonging to one of the p systems of circles K_k, K_q , and we may use directly all the formulae of art. 7 without the slightest modification.

Merely by way of illustration, and also in order to shew that with the aid of our formulae even numerical approximation is not wholly impracticable, we finally will consider a very special case. Let K_1, K_2, K_3 be three equal circular holes made in a plane, the centres a_1, a_2, a_3 of which form the vertices of an equilateral triangle, and let the common diameter of the holes be one third of the side of the triangle. As to the rim values of the potential function W , existing in the space outside the holes, we assume that W is equal to unity on that half of each rim, that is turned towards the centre ξ of the triangle, and equal to zero on the other half. We will now ask for the value $W(\xi)$ the function W takes at the centre ξ .

The first step is the construction of the two pairs of limiting points A^1, B^1 and A^2, B^2 . They are readily found as the points of intersection of the sides $a_1 a_3$ and $a_2 a_3$ with the orthogonal circle of K_1, K_2, K_3 (so that B^1 and B^2 lie within K_3). Then we proceed to calculate $L_1(\xi)$ and $L_2(\xi)$, necessarily equal to each other from reasons of symmetry. Now as with respect to their mutual distances the diameter of the holes is comparatively small, we may regard as practically coincident two points $x_{\mu}'' a''$.

and $x_{\rho''\beta''}$, whenever the common factor μ'' contains three fundamental marks at least. So the general formula III, art. 7.

$$e^{L_1(\xi)} = \left[\xi \xi_{3''}; \overset{1}{A} \overset{1}{B} \right]^{\frac{1}{2}} \prod_{\gamma''} \left[\xi \xi_{3''}; \overset{1}{B}_{\gamma''} \overset{1}{A}_{\gamma'} \right]$$

becomes simply

$$e^{L_1(\xi)} = \left[\xi \xi_{3''}; \overset{1}{A} \overset{1}{B} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\xi \xi_{3''}; \overset{1}{B}_{2''} \overset{1}{A}_{2''} \right] \left[\xi \xi_{3''}; \overset{1}{B}_{3''1''2''} \overset{1}{A}_{3''1''2''} \right],$$

or, by a slight transformation of the last factor,

$$e^{L_1(\xi)} = \left[\xi \xi_{3''}; \overset{1}{A} \overset{1}{B} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\xi \xi_{3''}; \overset{1}{B}_{2''} \overset{1}{A}_{2''} \right] \left[\xi_{3''} \xi; \overset{1}{B}_{1''2''} \overset{1}{A}_{1''2''} \right].$$

In this form the above equation may be used to evaluate $L_1(\xi)$. From it we shall find

$$L_1(\xi) = L_2(\xi) = -1,740.$$

Similarly we obtain, by considering, instead of ξ , a point on the rim K_1 and a point on the rim K_2 ,

$$\tau_{11} = \tau_{22} = -3,474, \quad \tau_{12} = \tau_{21} = -1,736.$$

Substituting these results in the equations

$$L_1(\xi) = \tau_{11} \lambda_1 + \tau_{12} \lambda_2,$$

$$L_2(\xi) = \tau_{21} \lambda_1 + \tau_{22} \lambda_2,$$

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

we get approximatively

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,334, \quad \lambda_3 = 0,332,$$

the exact result being of course

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Employing the latter value of the coefficients λ , symmetry again permits to write the formula I, art. 7, in the simplified form

$$W(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=3} \left[\sum_{\alpha''} \{ U_k(\xi_{\alpha''}) - U_k(\xi_{\alpha''3''}) \} \right].$$

In expanding the right-hand side still further simplification is possible from the same reason, moreover a very few terms of the infinite series need only be retained, because we agree to consider as practically coincident two points $x_{\mu''a''}$ and $x_{\mu''\beta''}$, as soon as μ'' contains three or more fundamental marks.

In fact, we shall find

$$\begin{aligned} W(\xi) = & 3U_1(\xi) - 6U_1(\xi_{2''}) + 6U_1(\xi_{2''3''}) + 6U_1(\xi_{2''1''}) - 2U_1(\xi_{2''3''2''}) \\ & - 2U_1(\xi_{2''1''2''}) - 2U_1(\xi_{2''1''3''}) - 2U_1(\xi_{2''3''1''}) \end{aligned}$$

Substituting in this expression the values of the potential U_1 at the points ξ , $\xi_{2''}$, $\xi_{2''3''}$, etc., determined beforehand by the usual method, we arrive at the final result

$$W(\xi) = 0,534.$$

DER FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA UND DIE AUFLÖSUNG
DER GLEICHUNGEN DURCH QUADRATWURZELN.

VON

K. TH. VAHLEN

in KÖNIGSBERG.

1. Es sei $f(x) = 0$ eine Gleichung n -ten Grades, deren n Wurzeln x_1, \dots, x_n von einander verschieden seien.

Man bilde die zwei Reihen von je $\left[\frac{n}{2}\right]$ Grössen:

$$x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_5 + x_6, x_7 + x_8, \dots$$

$$x_1 x_2, x_3 x_4, x_5 x_6, x_7 x_8, \dots;$$

von den n Grössen x_1, \dots, x_n bleiben dabei $n - 2 \left[\frac{n}{2}\right]$ Grössen — nämlich eine, x_n , oder keine — übrig.

Aus jeder der beiden Reihen bilde man ebenso zwei neue, so dass man vier Reihen von je $\left[\frac{n}{4}\right]$ Grössen erhält:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_5 + x_6 + x_7 + x_8, \dots$$

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4), (x_5 + x_6)(x_7 + x_8), \dots$$

$$x_1 x_2 + x_3 x_4, x_5 x_6 + x_7 x_8, \dots$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4, x_5 x_6 x_7 x_8, \dots;$$

dabei bleiben von jeder der obigen zwei Reihen

$$\left[\frac{n}{2} \right] - 2 \left[\frac{\left[\frac{n}{2} \right]}{2} \right] = \left[\frac{n}{2} \right] - 2 \left[\frac{n}{4} \right]$$

Grössen übrig.

Verfährt man mit den vier Reihen ebenso, so erhält man acht neue Reihen und in jeder der vier Reihen bleiben

$$\left[\frac{n}{4} \right] - 2 \left[\frac{\left[\frac{n}{4} \right]}{2} \right] = \left[\frac{n}{4} \right] - 2 \left[\frac{n}{8} \right]$$

Grössen übrig.

So fortfahrend, bis man keine neuen Reihen mehr bilden kann, erhält man im Ganzen:

$$n - 2 \left[\frac{n}{2} \right] + 2 \left[\frac{n}{2} \right] - 4 \left[\frac{n}{4} \right] + 4 \left[\frac{n}{4} \right] - 8 \left[\frac{n}{8} \right] + \dots = n$$

übrig bleibende Grössen, die in irgend einer Reihenfolge mit $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ bezeichnet werden mögen.

2. Wenn zwei zusammengehörige Werte für $x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$ bekannt sind, so ist dadurch das Wurzelpaar x_1, x_2 bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Denn, ist x_{i_1}, x_{i_2} ein anderes Wurzelpaar, also wenigstens einer der Indices i_1, i_2 von 1 und 2 verschieden, so würde aus:

$$x_1 + x_2 = x_{i_1} + x_{i_2}$$

$$x_1 x_2 = x_{i_1} x_{i_2}$$

die Übereinstimmung beider Wurzelpaare, also die Existenz wenigstens einer Doppelwurzel folgen; aber dies war ausgeschlossen. Die Grösse $u_1 (x_1 + x_2) + u_2 x_1 x_2$, mit Unbestimmten u_1, u_2 , nimmt also bei allen Permutationen der n Wurzeln $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Werte an, welche einer Gleichung mit nicht identisch verschwindender Discriminante $D(u_1, u_2)$ genügen. Giebt man, was also möglich ist, den Unbestimmten u_1, u_2 solche rationalen Werte, dass $D(u_1, u_2) \neq 0$ ist, so sind nach einem bekannten Satze $x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$ rationale Funktionen von $u_1 (x_1 + x_2) + u_2 x_1 x_2$.

Sind nämlich, allgemeiner, g_1 und g_2 rationale Functionen der Wurzeln und genügt $z = u_1 g_1 + u_2 g_2$ mit Unbestimmten u_1, u_2 der irreductibeln Gleichung $F(z; u_1, u_2) = 0$, aber $z = v_1 g_1 + v_2 g_2$ mit Bestimmten v_1, v_2 der irreductibeln Gleichung $F_1(z) = 0$, so ergibt sich $z = v_1 g_1 + v_2 g_2$ als *einzig* gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen: $F_1(z) = 0$ und $F(z - u_1 g_1 - u_2 g_2; v_1 - u_1, v_2 - u_2) = 0$, also als rationale Function von $u_1 g_1 + u_2 g_2$. Denn eine andere Wurzel der zweiten Gleichung: $z = u_1 g_1 + u_2 g_2 + (v_1 - u_1) g'_1 + (v_2 - u_2) g'_2$ könnte der ersten: $F_1(z) = 0$ bei beliebigen u_1, u_2 nur genügen, wenn $u_1 g_1 + u_2 g_2 = u_1 g'_1 + u_2 g'_2$ ist, so dass $F(z; u_1, u_2)$ nicht irreductibel wäre.

3. Wenn vier zusammengehörige Werte für

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \quad x_1 x_2 + x_3 x_4, \quad x_1 x_2 x_3 x_4$$

bekannt sind, so ergeben sich $x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$ als Wurzeln quadratischer Gleichungen, also zweideutig. Wie diese Werte zusammengehören ergibt sich aus 2. Alsdann ergeben sich die Werte von x_1 und x_2 , ebenso von x_3 und x_4 als Wurzeln quadratischer Gleichungen. Ist $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}$ ein anderes Wurzelquadrupel, also wenigstens einer der Indices i_1, i_2, i_3, i_4 verschieden von 1, 2, 3, 4, so würde aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} + x_{i_4} \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) &= (x_{i_1} + x_{i_2})(x_{i_3} + x_{i_4}) \\ x_1 x_2 + x_3 x_4 &= x_{i_1} x_{i_2} + x_{i_3} x_{i_4} \\ x_1 x_2 x_3 x_4 &= x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \end{aligned}$$

die Übereinstimmung beider Wurzelquadrupel — von der Reihenfolge abgesehen —, also die Existenz mindestens einer Doppelwurzel folgen; aber dies war ausgeschlossen. Die Grösse

$$\begin{aligned} &u_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + u_2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ &+ u_3(x_1 x_2 + x_3 x_4) + u_4 x_1 x_2 x_3 x_4, \end{aligned}$$

mit Unbestimmten u_1, u_2, u_3, u_4 , genügt daher einer Gleichung vom Grade $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ mit nicht identisch verschwindender Discriminante

$D(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Giebt man, was also möglich ist, den Unbestimmten u_1, u_2, u_3, u_4 solche rationalen Werte, dass $D(u_1, u_2, u_3, u_4) \neq 0$ ist, so sind

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4, (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), x_1 x_2 + x_3 x_4, x_1 x_2 x_3 x_4$$

rationale Funktionen von

$$u_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + u_2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ + u_3(x_1 x_2 + x_3 x_4) + u_4 x_1 x_2 x_3 x_4.$$

4. So fortfahrend erkennt man, dass sich die n Wurzeln x_1, \dots, x_n in bestimmter — d. h. bis auf die Reihenfolge bestimmter — Weise durch blosses Quadratwurzelausziehen ergeben, wenn die Werte der n Grössen $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ bekannt sind.

Bilden wir die Funktion $u = u^{(1)}x^{(1)} + \dots + u^{(n)}x^{(n)}$, zunächst mit Unbestimmten $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$. Die Funktion u bleibt ungeändert bei den $\left[\frac{n}{2}\right]$ Vertauschungen von x_1 mit x_2 , von x_3 mit x_4 , von x_5 mit x_6 , von x_7 mit x_8 , u. s. w., ferner bei den $\left[\frac{n}{4}\right]$ Vertauschungen von x_1, x_2 mit x_3, x_4 , von x_5, x_6 mit x_7, x_8 , u. s. w., ferner bei den $\left[\frac{n}{8}\right]$ Vertauschungen von x_1, x_2, x_3, x_4 mit x_5, x_6, x_7, x_8 , u. s. w., u. s. w. Die Funktion u kann also nur bei $\frac{|n|}{2\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \dots} = N$ Permutationen der Wurzeln

verschiedene Werte annehmen; die entsprechenden Werte sind wirklich, bei Unbestimmten $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$, alle von einander verschieden. Denn sonst wäre etwa:

$$x^{(1)} = \bar{x}^{(1)} \\ \dots \dots \dots \\ x^{(n)} = \bar{x}^{(n)},$$

wo $\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(n)}$ die den $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ analogen Funktionen von den in anderer Reihenfolge genommenen Wurzeln $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ bedeuten, und sich diese

Reihenfolge von der ursprünglichen x_1, \dots, x_n nicht nur durch zulässige Vertauschungen unterscheidet. Daraus würde sich, bis auf zulässige Vertauschungen, die Übereinstimmung von x_1, \dots, x_n mit $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, also die Existenz wenigstens einer Doppelwurzel ergeben. Da dies ausgeschlossen war, genügt u einer Gleichung $G(u) = 0$ vom Grade N und von nicht identisch verschwindender Discriminante $D(u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$. Giebt man, was also möglich ist, den Grössen $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ solche rationalen Werte, dass $D(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) \neq 0$ ist, so sind $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ rationale Funktionen von u , und die vollständige Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ durch Quadratwurzeln ist zurückgeführt auf die Auffindung einer Wurzel der Resolvente $G(u) = 0$.

5. Hat also $G(u) = 0$ eine rationale Wurzel, so sind sämtliche Wurzeln von $f(x) = 0$ durch Quadratwurzeln darstellbar. Dasselbe findet aber auch umgekehrt statt. Es sei der Wert einer Wurzel x_1 durch α und nicht weniger Quadratwurzelausziehungen zu ermitteln; dann ist die allgemeinste Annahme die, dass der Radicand jeder später auszuziehenden Wurzel, aber nicht diese Wurzel selbst, von den bereits ausgezogenen Wurzeln rational abhängt. Die Gleichung $f(x_1) = 0$ nimmt in Bezug auf die letzte Quadratwurzel $\sqrt{r_a}$ die Form an: $A + B\sqrt{r_a} = 0$, wo A, B und r_a , aber nicht $\sqrt{r_a}$ von den vorhergehenden Quadratwurzeln $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \dots, \sqrt{r_{a-1}}$ rational abhängen; daraus folgt $A = 0, B = 0$, da $r_a \neq 0$, also ist die Gleichung $f(x) = 0$ auch durch den zu x_1 in Bezug auf $\sqrt{r_a}$ conjugirten Wert x_2 zu befriedigen. Die Gleichungen $A = 0, B = 0$ nehmen in Bezug auf die vorletzte Wurzel $\sqrt{r_{a-1}}$ die Form an: $A_1 + B_1\sqrt{r_{a-1}} = 0, C_1 + D_1\sqrt{r_{a-1}} = 0$, woraus ebenso folgt, dass $A_1 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0, D_1 = 0$ sein muss, dass also auch die zu x_1 und x_2 in Bezug auf $\sqrt{r_{a-1}}$ conjugirten Werte x_3 und x_4 die Gleichung $f(x) = 0$ befriedigen, u. s. w. Die sämtlichen Wurzeln von $f(x) = 0$ ordnen sich also in Gruppen von 2^a conjugirten, $2^{a'}$ conjugirten, u. s. w. Jetzt sind offenbar $x_1 + x_2, x_1x_2, x_3 + x_4, x_3x_4, \dots$ rational in $\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{a-1}}$; also $x_1 + x_2 + x_3 + x_4, (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), x_1x_2 + x_3x_4, x_1x_2x_3x_4, \dots$ rational in $\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{a-2}}$ u. s. w., und ebenso für die Gruppen von $2^{a'}$ conjugirten Wurzeln u. s. w., u. s. w.; woraus schliesslich hervorgeht, dass die mit $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ bezeichneten Funktionen, also auch u rational ist; w. z. b. w. Wir können daher den Satz aussprechen:

Damit eine von ihren Doppelpunkten befreite Gleichung $f(x) = 0$ durch Quadratwurzeln vollkommen auflösbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Resolvente $G(u) = 0$ eine rationale Wurzel habe.

6. Für eine kubische Gleichung ohne Doppelpunkt ergibt sich ohne weiteres, dass, wenn sich nur eine Wurzel durch Quadratwurzeln darstellen lässt, dasselbe für eine zweite der Fall ist, während die dritte rational wird. Die Resolvente $G(u) = 0$ hat die drei Wurzeln: $u = u_1 x_1 + u_2(x_2 + x_3) + u_3 x_2 x_3$ und stimmt für die zulässige Wahl $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0$ mit der kubischen Gleichung selbst überein. Also:

Damit sich eine Wurzel einer kubischen Gleichung durch Quadratwurzeln darstellen lässt, ist notwendig und hinreichend, dass die kubische Gleichung eine rationale Wurzel besitzt.

7. Nur für $n = 4$ ist N kleiner als n , nämlich gleich drei: man erhält die Auflösung der biquadratischen Gleichung durch eine kubische Resolvente. Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der Gleichung:

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0, \quad (a=1)$$

so hat die Resolvente:

$$4u^3 - (ae - 4bd + 3c^2)u + (ace + 2bcd - ad^2 - c^3 - b^2e) = 0$$

die Wurzeln:

$$u = \frac{1}{6}(x_1 x_2 + x_3 x_4) - \frac{1}{6}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4).$$

Aus den daraus folgenden Gleichungen:

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 3c + 3u \quad (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 3c - 3u$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = e \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4b$$

ergibt sich:

$$\left. \begin{matrix} x_1 x_2 \\ x_3 x_4 \end{matrix} \right\} = \frac{3c + 3u}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}(c + u)^2 - e}, \quad \left. \begin{matrix} x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 \end{matrix} \right\} = -2b \pm \sqrt{4b^2 - 3(c - u)}.$$

Die Vorzeichen gehören so zusammen, dass:

$$x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2) = -4d, \text{ d. h.}$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}(c+u)^2 - e} \cdot \sqrt{4b^2 - 3(c-u)} = -2d + 3b(c+u)$$

ist; dann ergeben sich die vier Wurzeln aus der Formel:

$$\begin{aligned} & -b \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}(c-u)} \\ & \pm \sqrt{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}(c-u)}\right)^2 - \frac{3}{2}(c+u) \pm \sqrt{\frac{9}{4}(c+u)^2 - e}}, \end{aligned}$$

welche die Cartesische verallgemeinert und aus der unmittelbar der Satz ersichtlich ist: *Eine biquadratische Gleichung ist dann und nur dann durch Quadratwurzeln auflösbar, wenn ihre kubische Resolvente eine rationale Wurzel hat.*

8. Die Rationalität der durch u repräsentierten Affektfunktionen kann bei besonderen Eigenschaften der Gleichung $f(x) = 0$ manchmal direkt erkannt werden. Es sei z. B. $p = 2^a + 1$ eine Primzahl, $f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$, x eine Wurzel von $f(x) = 0$, g eine primitive Wurzel für p . Setzt man:

$$x^{g^{i_0+2i_1+2^2i_2+\dots+2^{a-1}i_{a-1}}} = x_{2^a-1-i_0+2^a-2i_1+\dots+i_{a-1}}, \quad (i_0, \dots, i_{a-1} = 0, 1)$$

so sind $x_0, x_1, \dots, x_{2^a-1}$ alle Wurzeln von $f(x) = 0$. Jetzt sei $(x_0 x_1)$ eine rationale symmetrische Funktion von x_0 und x_1 , $(x_2 x_3)$ dieselbe Funktion von x_2 und x_3 ; $(x_0 x_1 x_2 x_3)$ eine rationale symmetrische Funktion von $(x_0 x_1)$ und $(x_2 x_3)$; $(x_4 x_5 x_6 x_7)$ dieselbe Funktion von x_4, x_5, x_6, x_7 , u. s. w., so ist:

$$(x_0 x_1 x_2 x_3 \dots x_{2^a-1})$$

eine rationale Funktion von x , welche offenbar bei jeder Substitution:

$$x \parallel x^{g^{2^j}}, \quad (j = 0, 1, \dots, a-1)$$

also auch bei jeder aus diesen componirten Substitution:

$$x \parallel x^i \quad (i = 0, 1, \dots, 2^a - 1)$$

unverändert bleibt, also rational ist. Also:

Die Kreistheilungsgleichung $x^p = 1$ ist durch Quadratwurzeln auflösbar oder das reguläre p -Eck ist mit Zirkel und Lineal construierbar, wenn p eine Primzahl von der Form $2^a + 1$ ist.

9. Im Allgemeinen, wo $G(u)$ keine rationale Wurzel besitzt, ergibt sich für eine Gleichung $f(x) = 0$ mit reellen Zahlencoëfficienten die Existenz und Ermittlung sämtlicher Wurzeln aus dem Umstande, dass die Gleichung $G(u) = 0$ reelle Coëfficienten und ungraden Grad, also sicher eine — reelle — Wurzel besitzt. Dieser Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra* schliesst sich an die mit Euler und de Foncenex beginnende Gruppe von Beweisen an und wird, wie fast alle diese, von dem Gaussischen Einwand betroffen: es werde dabei die Wurzelexistenz bereits vorausgesetzt. Auf die Berechtigung oder Nichtberechtigung dieses Einwandes soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen, sondern nur gezeigt werden, dass ohne Überwindung principieller Schwierigkeiten dem Beweise eine von diesem Einwande freie Form gegeben werden kann.

10. Zunächst ist Folgendes vor auszuschicken:

Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion, $f'(x)$ ihre Ableitung. Durch das Euklidische Verfahren werde ihr höchster gemeinsamer Teiler:

$$f_1 = (f, f')$$

gefunden; ebenso sei

$$f_2 = (f_1, f'_1)$$

u. s. w. bis zu

$$f_r = (f_{r-1}, f'_{r-1}) = \text{const.}$$

Dann giebt in der Reihe ganzer Funktionen:

$$\frac{f}{f_1}, \frac{f_1}{f_2}, \dots, \frac{f_{r-1}}{f_r}, 1$$

jede, $\frac{f_{i-1}}{f_i}$, dividirt durch die folgende, $\frac{f_i}{f_{i+1}}$, eine ganze Funktion g_i , wie aus der Identität hervorgeht:

$$\frac{f'_{i-1}}{f_i} - \left(\frac{f_{i-1}}{f_i} \right)' = \frac{f'_i}{(f_i, f'_i)} \cdot \frac{f_{i-1}f_{i+1}}{f_i^2}; \quad (i=1, 2, \dots, r-1)$$

da ein Nenner von $\frac{f_{i-1}f_{i+1}}{f_i^2}$ ein Faktor von f_i^2 wäre, also zwar in f'_i , aber nicht mehr in $\frac{f_i}{(f_i, f'_i)}$ enthalten sein könnte. Also wird: $\frac{f_{i-1}}{f_i} = g_i g_{i+1} \dots g_r$ und daraus $f_{i-1} = g_i g_{i+1}^2 g_{i+2}^3 \dots g_r^{r-i+1}$, speciell $f = g_1 g_2^2 g_3^3 \dots g_r^r$, wo die Funktionen g_i ganze Funktionen sind. Für diese gilt der Satz:

a) Die Funktionen g_1, g_2, \dots, g_r sind paarweise teilerfremd und jede ohne mehrfachen Teiler.

Denn enthalten sie einen einfachen Faktor bzw. i_1 -, i_2 -, \dots , i_r -mal, so enthält f denselben $(i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots + ri_r)$ -mal und f' , wie die Differentiation zeigt, einmal weniger; aber $f_1 = g_2 g_3^2 \dots g_r^{r-1}$ enthält ihn $(i_1 + i_2 + \dots + i_r)$ -mal weniger, also muss $i_1 + i_2 + \dots + i_r = 1$ sein, woraus die Behauptung folgt.

Da also speciell g_1 keinen mehrfachen Teiler hat, folgt aus $f_1 = g_2 g_3^2 \dots g_r^{r-1}$ der Satz:

b) Eine ganze Funktion hat keinen mehrfachen Teiler wenn und nur wenn sie zu ihrer Ableitung teilerfremd ist.

Aus a) und b) folgt:

c) Jede Funktion g_i ist zu ihrer Ableitung teilerfremd.

Schliesslich aus a) und c):

d) Die Auffindung aller Faktoren einer ganzen Funktion, eines jeden gleich in richtiger Vielfachheit, kommt auf die Zerlegung solcher Funktionen zurück, die zu ihrer Ableitung teilerfremd sind.

11. Mit

$$\tilde{s}_{i_1, \dots, i_a}$$

werden

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_\nu} = n$$

$$\binom{(i_1, \dots, i_a = 0, 1)}{a = a_1, \dots, a_\nu}$$

$$a_1 > a_2 > \dots > a_\nu$$

unbestimmte Zahlen, mit $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ die Werte ihrer elementarsymmetrischen Funktionen bezeichnet.

Durch die Gleichungen:

$$\text{I} \quad \begin{cases} \xi_{i_1, \dots, i_{\beta-1}}^{(0, i_{\beta+1}, \dots, i_a)} = \xi_{i_1, \dots, i_{\beta-1}, 0}^{(i_{\beta+1}, \dots, i_a)} + \xi_{i_1, \dots, i_{\beta+1}, 1}^{(i_{\beta+1}, \dots, i_a)} \\ \xi_{i_1, \dots, i_{\beta-1}}^{(1, i_{\beta+1}, \dots, i_a)} = \xi_{i_1, \dots, i_{\beta-1}, 0}^{(i_{\beta+1}, \dots, i_a)} \cdot \xi_{i_1, \dots, i_{\beta+1}, 1}^{(i_{\beta+1}, \dots, i_a)} \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_a = 0, 1 \\ \beta = a, a-1, a-2, \dots, 2, 1 \\ a = a_1, a_2, \dots, a_r \end{matrix} \right)$$

wird ein System ganzer Funktionen der ξ_{i_1, \dots, i_a} definiert. Setzt man:

$$\omega = \sum \omega_{(i_1, \dots, i_a)} \xi_{(i_1, \dots, i_a)} \quad \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_a = 0, 1 \\ a = a_1, \dots, a_r \end{matrix} \right)$$

mit Unbestimmten $\omega_{(i_1, \dots, i_a)}$, so bleibt ω ungeändert bei Vertauschung des Systems:

$$\xi_{i_1, \dots, i_{\beta-1}, 0, i_{\beta+1}, \dots, i_a} \quad (i_{\beta+1}, \dots, i_a = 0, 1)$$

mit dem Systeme:

$$\xi_{i_1, \dots, i_{\beta-1}, 1, i_{\beta+1}, \dots, i_a}, \quad (i_{\beta+1}, \dots, i_a = 0, 1)$$

also, da es $2^{\beta-1}$ solcher Systeme giebt — nämlich für $i_1, i_2, \dots, i_{\beta-1} = 0, 1$ — im Ganzen bei $2^{\sum_{a=1}^r \beta_a - 1} = 2^{\sum_{a=1}^r a - 1} = 2^{n-\nu}$ Permutationen der ξ_{i_1, \dots, i_a} . Die Gleichung $G(\omega; \dots \omega_{(i_1, \dots, i_a)} \dots, \dots \gamma_i \dots) = 0$, welcher ω genügt, ist also von dem *ungeraden*¹ Grade $N = \frac{n}{2^{n-\nu}}$; ihre Coëfficienten sind ganze Funktionen der $\omega_{(i_1, \dots, i_a)}$ und der γ_i , der höchste Coëfficient ist gleich Eins.

Die Grössen $\xi_{(i_1, \dots, i_a)}$ sind, im Rationalitätsbereich $(\dots \omega_{(i_1, \dots, i_a)} \dots, \dots \gamma_i \dots)$, rationale Funktionen von ω . Durch Auflösung der quadratischen Gleichungen:

$$\text{II} \quad \left(\xi_{i_1, \dots, i_{\beta}}^{(i_{\beta+1}, \dots, i_a)} \right)^2 - \xi_{i_1, \dots, i_{\beta-1}}^{(0, i_{\beta+1}, \dots, i_a)} \left(\xi_{i_1, \dots, i_{\beta}}^{(i_{\beta+1}, \dots, i_a)} \right) + \xi_{i_1, \dots, i_{\beta-1}}^{(1, i_{\beta+1}, \dots, i_a)} = 0 \quad \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_a = 0, 1 \\ \beta = 1, 2, \dots, a \\ a = a_1, a_2, \dots, a_r \end{matrix} \right)$$

¹ Bekanntlich enthält $\frac{n}{p}$ eine Primzahl p genau $\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots = \frac{n - n_p}{p-1}$

mal als Faktor, wenn n_p die Quersumme von n im p -adischen Zahlensysteme bedeutet; für $p = 2$ wird die Anzahl gleich $n - \nu$.

ergeben sich die ξ_{i_1, \dots, i_a} als explicite algebraische Funktionen von den $\xi^{(i_1, \dots, i_a)}$, also von ω ; die zusammengehörigen Quadratwurzelvorzeichen ergeben sich daraus, dass jedes $\xi_{i_1, \dots, i_\beta}^{(i_\beta+1, \dots, i_a)}$ rationale Funktion von

$$\text{III} \quad \omega_{i_1, \dots, i_\beta} = \sum \omega^{(i_\beta+1, \dots, i_a)} \xi_{i_1, \dots, i_\beta}^{(i_\beta+1, \dots, i_a)} \quad (i_\beta+1, \dots, i_a=0, 1)$$

ist, wo die Unbestimmten $\omega^{(i_\beta+1, \dots, i_a)}$ in den Rationalitätsbereich aufzunehmen sind.

Wir wollen die Permutationen der ξ_{i_1, \dots, i_a} , bei welchen ω ungeändert bleibt, als die Gruppe (ω) bezeichnen. Die Grösse $\omega_{i_1, \dots, i_\beta}$ nimmt bei den Permutationen der Gruppe (ω) die 2^β conjugirten Werte:

$$\omega_{i_1, \dots, i_\beta} \quad (i_1, \dots, i_\beta=0, 1)$$

an. Es sei $\bar{\xi}_{i_1, \dots, i_a}$ eine nicht zur Gruppe (ω) gehörige Permutation der ξ_{i_1, \dots, i_a} und $\bar{\omega}, \dots$ die den ω, \dots analogen Funktionen. Eine Unbestimmtheit in den Ausdrücken der ξ_{i_1, \dots, i_a} durch ω kann nur eintreten, wenn z. B.

$$\omega_{i_1, \dots, i_\beta} = \bar{\omega}_{i'_1, \dots, i'_\beta}$$

ist. Durch blosse Bezeichnungsänderung in den Indices der $\bar{\xi}_{i_1, \dots, i_a}$ ergibt sich statt dessen:

$$\omega_{i_1, \dots, i_\beta} = \bar{\omega}_{i_1, \dots, i_\beta},$$

woraus das System:

$$\xi_{i_1, \dots, i_\beta}^{(i_\beta+1, \dots, i_a)} = \bar{\xi}_{i_1, \dots, i_\beta}^{(i_\beta+1, \dots, i_a)} \quad (i_\beta+1, \dots, i_a=0, 1)$$

folgt. Die Gleichungen II ergeben dann:

$$\xi_{i_1, \dots, i_a} = \bar{\xi}_{i_1, \dots, i_a}, \quad (i_1, \dots, i_a=0, 1 \quad a=a_1, a_2, \dots, a_\nu)$$

abgesehen von Permutationen der Gruppe (ω) . Da sich die Reihenfolgen ξ_{i_1, \dots, i_a} und $\bar{\xi}_{i_1, \dots, i_a}$ nicht nur durch solche Permutationen unterscheiden sollen, müssen wenigstens zwei der Grössen ξ_{i_1, \dots, i_a} zusammenfallen. Daraus folgt umgekehrt, dass auch zwei der N Werte von ω zusammenfallen.

12. Das Produkt der $N(N-1)$ Wurzeldifferenzen von

$$G(\omega; \dots \omega^{(i_1, \dots, i_a)} \dots, \dots \gamma_i \dots) = 0$$

ist eine ganze Funktion $D(\dots \omega^{(i_1, \dots, i_a)} \dots, \dots \gamma_i \dots)$, deren höchster von den $\omega^{(i_1, \dots, i_a)}$ unabhängiger Faktor $\Delta(\dots \gamma_i \dots)$ sei. Geben wir jetzt den Zahlen γ_i specielle reelle Werte c_i , so dass $\Delta(\dots c_i \dots) \neq 0$ ist, so kann man auch den $\omega^{(i_1, \dots, i_a)}$ solche reellen Werte $u^{(i_1, \dots, i_a)}$ geben, dass $D(\dots u^{(i_1, \dots, i_a)} \dots, \dots c_i \dots) \neq 0$ ist. Auch den in III vorkommenden Unbestimmten $\omega^{(i_{\beta+1}, \dots, i_a)}$ sind solche reellen Werte $u^{(i_{\beta+1}, \dots, i_a)}$ beizulegen, dass die Discriminanten der Gleichungen für die $\omega_{i_1, \dots, i_{\beta}}$ nicht verschwinden. Wir definiren jetzt ω als *eindeutige* Funktion der reellen Veränderlichen $\dots \gamma_i \dots$ durch folgenden Algorithmus: durch eventuelle Substitution $\omega \parallel -\omega$ wird bewirkt, dass $G(\omega; \dots u^{(i_1, \dots, i_a)} \dots, \dots \gamma_i \dots)$ im Intervall $\frac{0}{1} \dots \frac{1}{0}$ das Vorzeichen wechselt; jedes Intervall $\frac{a}{b} \dots \frac{c}{d}$ in welchem

$G(\omega; \dots)$ das Zeichen wechselt, werde durch $\frac{a+c}{b+d}$ in zwei kleinere geteilt,

in deren einem der Wechsel erfolgt; so kann man von $\frac{0}{1} \dots \frac{1}{0}$ ausgehend

eine *bestimmte* Wurzel von $G(\omega; \dots)$ in beliebig enge Grenzen einschliessen.¹ Nun ist jedes ξ_{i_1, \dots, i_a} rational in ω_{i_1, \dots, i_a} ; jedes ω_{i_1, \dots, i_a} von der Form $A + (-1)^{i_{\beta}} \sqrt{B}$, wo A und B rational in $\omega_{i_1, \dots, i_{\beta-1}}$ sind. Dadurch wird jede der n Zahlen ξ_{i_1, \dots, i_a} eine vollkommen bestimmte Funktion der Werte der elementarsymmetrischen Funktionen γ_i ; und das ganze Verfahren versagt dann und nur dann, wenn die γ_i solche speciellen Werte annehmen, dass

$$D(\dots u^{(i_1, \dots, i_a)} \dots, \dots \gamma_i \dots) = 0$$

ist. Dies findet für die Annahme $\gamma_i = c_i$ nicht statt; erhalten in diesem Falle die ξ_{i_1, \dots, i_a} die Werte x_{i_1, \dots, i_a} , so haben sich uns diese Werte, für welche:

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots c_n = \prod (x - x_{i_1, \dots, i_a})$$

ist, ergeben, *ohne ihre Existenz vorauszusetzen*. Die Bedingung:

$$D(\dots u^{(i_1, \dots, i_a)} \dots, \dots c_i \dots) \neq 0,$$

¹ Stösst man auf eine rationale Wurzel, so nehme man diese.

unter welcher die Ermittlung der x_{i_1, \dots, i_u} nur stattfinden konnte, erweist sich nach (11) als identisch mit der Annahme, dass die x_{i_1, \dots, i_u} alle von einander verschieden sind, oder dass $f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$ keinen mehrfachen Teiler besitzt; und diese ist nach (10b) erfüllt, wenn und nur wenn $f(x)$ und $f'(x)$ teilerfremd sind, wie nach (10d) vorausgesetzt werden durfte.

Damit ist der Beweis des Fundamentalsatzes vollendet. Derselbe vereinigt — allen anderen Beweisen gegenüber — die drei Vorzüge in sich:

- erstens: nur arithmetisch-algebraische Hilfsmittel und zwar der einfachsten Art zu benutzen,
 - zweitens: *die* Grössen wirklich zu ermitteln, deren Existenz er nachweist,
 - drittens: sich gleichzeitig auf *sämtliche* Wurzeln zu beziehen.
-

THÉORIE DES ÉQUATIONS REPRÉSENTABLES PAR TROIS SYSTÈMES LINÉAIRES DE POINTS COTÉS

PAR

MAURICE D'OCAGNE

à PARIS.

Préambule.

1. Supposons qu'une équation donnée entre α_1 , α_2 et α_3 puisse se mettre sous la forme

$$(E) \quad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime que les points définis en coordonnées homogènes respectivement par

$$(\alpha_1) \quad x = f_1(\alpha_1), \quad y = \varphi_1(\alpha_1), \quad t = \psi_1(\alpha_1),$$

$$(\alpha_2) \quad x = f_2(\alpha_2), \quad y = \varphi_2(\alpha_2), \quad t = \psi_2(\alpha_2),$$

$$(\alpha_3) \quad x = f_3(\alpha_3), \quad y = \varphi_3(\alpha_3), \quad t = \psi_3(\alpha_3),$$

sont en ligne droite. Si donc, dans les trois systèmes de formules précédents, nous faisons varier respectivement α_1 , α_2 et α_3 en ayant soin d'insérer à côté de chaque point obtenu la valeur du paramètre correspondant, nous n'aurons qu'à *couper les trois systèmes de points cotés ainsi construits par une droite quelconque pour obtenir un système de valeurs*^{*} de α_1 , α_2 et α_3 satisfaisant à l'équation donnée.

Les points cotés correspondant à chaque paramètre sont distribués sur une courbe qui en est dite le *support*.

2. Si $f_i(\alpha_i)$, $\varphi_i(\alpha_i)$, $\psi_i(\alpha_i)$ sont des fonctions linéaires d'une même fonction $\theta_i(\alpha_i)$, le système (α_i) a pour support une ligne droite sur laquelle il constitue une sorte de graduation. Lorsque la fonction θ_i change, cette ligne droite reste la même; seule la graduation se modifie. Le cas le plus simple est celui où la fonction $\theta_i(\alpha_i)$ se réduit à α_i ; le système de points cotés (α_i) est alors dit *linéaire*.

Le problème se pose d'abord de reconnaître quelles sont les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés et de déterminer pour une telle équation les fonctions f_i , φ_i , ψ_i ($i = 1, 2, 3$) correspondantes. C'est l'objet de la première partie de ce Mémoire.

Si, en faisant varier α_i par échelons égaux, on obtient sur le support rectiligne des points également espacés les uns des autres, le système est dit *régulier*. Un tel système réalisant, au point de vue de la représentation géométrique, le maximum de simplicité, il est intéressant de rechercher si, par une transformation homographique appropriée, on peut rendre réguliers un, deux, ou même les trois systèmes linéaires servant à représenter une équation donnée. C'est l'objet de la seconde partie du Mémoire.

A la vérité, on aurait pu traiter les deux problèmes à la fois, mais la solution eût alors perdu en netteté sans gagner beaucoup en brièveté; aussi la division adoptée pour le sujet a-t-elle paru préférable.

Le premier problème est susceptible d'une interprétation géométrique qui se trouve indiquée dans une Note placée à la fin de la première partie.

Formules et remarques préliminaires.

3. Etant donné un ensemble de trois systèmes de points cotés, on peut toujours, en conservant les cotes, lui faire subir une transformation homographique quelconque puisque, dans une telle transformation, l'alignement des points se conserve.

On pourra dès lors faire en sorte que les supports des trois systèmes soient des droites assignées d'avance, en distinguant toutefois les cas où ces supports sont ou non concourants, circonstance qui subsiste pour toute transformation homographique.

1^{er} Cas. *Les supports ne sont pas concourants.* Dans ce cas, une transformation homographique permet de faire coïncider deux des supports avec les axes de coordonnées Ox et Oy et le troisième avec la droite de l'infini du plan Oxy (ce qui revient à faire correspondre à chaque valeur de α_3 une direction du plan). Les trois systèmes sont dès lors définis par

$$(a) \quad \begin{cases} x = m_1 \alpha_1 + n_1, & y = 0, & t = p_1 \alpha_1 + q_1, \\ x = 0, & y = p_2 \alpha_2 + q_2, & t = m_2 \alpha_2 + n_2, \\ x = p_3 \alpha_3 + q_3, & y = m_3 \alpha_3 + n_3, & t = 0, \end{cases}$$

et l'équation représentée prend la forme

$$(Ea) \quad (m_1 \alpha_1 + n_1)(m_2 \alpha_2 + n_2)(m_3 \alpha_3 + n_3) + (p_1 \alpha_1 + q_1)(p_2 \alpha_2 + q_2)(p_3 \alpha_3 + q_3) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(E'a) \quad M(\alpha_1 + s_1)(\alpha_2 + s_2)(\alpha_3 + s_3) + P(\alpha_1 + t_1)(\alpha_2 + t_2)(\alpha_3 + t_3) = 0.$$

2^e Cas. *Les supports sont concourants.* Dans ce cas, une transformation homographique permet de faire coïncider deux des supports avec Ox et Oy et le troisième avec la bissectrice de l'angle de ces axes. Les trois systèmes sont alors définis par

$$(b) \quad \begin{cases} x = m_1 \alpha_1 + n_1, & y = 0, & t = p_1 \alpha_1 + q_1, \\ x = 0, & y = m_2 \alpha_2 + n_2, & t = p_2 \alpha_2 + q_2, \\ x = m_3 \alpha_3 + n_3, & y = m_3 \alpha_3 + n_3, & t = -(p_3 \alpha_3 + q_3), \end{cases}$$

et l'équation représentée prend la forme

$$(Eb) \quad \frac{p_1 \alpha_1 + q_1}{m_1 \alpha_1 + n_1} + \frac{p_2 \alpha_2 + q_2}{m_2 \alpha_2 + n_2} + \frac{p_3 \alpha_3 + q_3}{m_3 \alpha_3 + n_3} = 0.$$

qu'on peut encore écrire

$$(E'b) \quad \frac{t_1}{\alpha_1 + s_1} + \frac{t_2}{\alpha_2 + s_2} + \frac{t_3}{\alpha_3 + s_3} = N.$$

Chacune des équations (Ea) et (Eb) développée est de la forme

$$(E) \quad A\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + B_1\alpha_2\alpha_3 + B_2\alpha_3\alpha_1 + B_3\alpha_1\alpha_2 + C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + D = 0.$$

Toute la question revient à mettre une équation donnée du type (E) sous l'une des formes (Ea) ou (Eb) , en ayant pour tous les paramètres des valeurs *réelles*.

4. En vue d'alléger la suite de notre exposé, nous allons définir ici certaines fonctions des coefficients et faire quelques remarques relatives à des équations qui s'y rattachent et qui joueront plus loin un rôle important.

Posons

$$(I) \quad \begin{cases} F_0 = B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 - AD, \\ E_i = AC_i - B_jB_k, \quad F_i = F_0 - 2B_iC_i, \quad G_i = B_iD - C_jC_k. \end{cases} \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

Le discriminant du premier membre de l'équation (E) rendu homogène peut s'écrire

$$(II) \quad \Delta = F_0^2 - 4(B_1C_1B_2C_2 + B_2C_2B_3C_3 + B_3C_3B_1C_1 - AC_1C_2C_3 - B_1B_2B_3D),$$

et on a

$$(III) \quad F_i^2 - 4E_iG_i = \Delta. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Si donc on considère les trois équations

$$(\varphi_i) \quad \varphi_i(\rho) = E_i\rho^2 + F_i\rho + G_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

la condition de réalité des racines est pour chacune d'elles

$$\Delta \geq 0.$$

On a encore

$$(IV) \quad \begin{cases} E_iB_i^2 + F_iAB_i + G_iA^2 = -E_jE_k, \\ E_iC_k^2 + F_iB_jC_k + G_iB_j^2 = -E_kG_j, \\ E_iD^2 + F_iC_iD + G_iC_i^2 = -G_jG_k. \end{cases}$$

On en déduit que si $E_k = 0$, c'est à dire si l'équation (φ_k) a une racine infinie, l'équation (φ_i) a une racine égale à $\frac{B_i}{A}$, égale aussi à $\frac{C_k}{B_j}$, et de même l'équation (φ_j) une racine égale à $\frac{B_j}{A}$, égale aussi à $\frac{C_k}{B_i}$, etc.

Enfin, on voit bien aisément que, parmi les trois systèmes E_i, F_i, G_i ($i = 1, 2, 3$) il ne peut y en avoir un composé de trois éléments nuls sans qu'il en soit de même pour l'un des deux autres. La variable dont l'indice diffère de ceux de ces deux systèmes entre alors dans un binôme qui se met en facteur dans le premier membre de (E) . Cette équation cesse alors d'établir un lien entre les trois variables, et il n'y a plus lieu dès lors d'en rechercher une représentation.

Dans le cas où tous les coefficients de (E) sont différents de zéro, cette proposition se démontre ainsi qu'il suit. On a

$$AC_i - B_jB_k = 0, \quad B_jC_j + B_kC_k - B_iC_i - AD = 0, \quad B_iD - C_jC_k = 0.$$

Tirant A et D des équations extrêmes pour porter leurs valeurs dans l'équation du milieu on obtient

$$(B_jC_j - B_iC_i)(B_kC_k - B_iC_i) = 0.$$

L'un de ces deux facteurs est nécessairement nul; soit le premier. Rapprochant l'équation qui en résulte des deux extrêmes du groupe précédent, on en conclut que

$$\frac{A}{B_k} = \frac{B_j}{C_i} = \frac{B_i}{C_j} = \frac{C_k}{D} = \frac{1}{\lambda}.$$

Dès lors, l'équation (E) , qui peut s'écrire

$$\alpha_i\alpha_j(A\alpha_k + B_k) + \alpha_i(B_j\alpha_k + C_i) + \alpha_j(B_i\alpha_k + C_j) + C_k\alpha_k + D = 0,$$

devient

$$(\alpha_k + \lambda)(A\alpha_i\alpha_j + B_j\alpha_i + B_i\alpha_j + C_k) = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Si un ou plusieurs coefficients de (E) sont nuls, la démonstration ci-dessus se modifie un peu dans la forme, mais subsiste pour le fond. Partout, dans la suite, nous supposons donc E_i, F_i et G_i ($i = 1, 2, 3$) non nuls à la fois.

PREMIÈRE PARTIE.

A. *Equations représentables par trois systèmes linéaires non concourants.*

5. Afin d'éviter toute hypothèse particulière nous représenterons par i, j, k une permutation quelconque des indices 1, 2, 3 et nous supposons les équations (E) , (Ea) , $(E'a)$ remplacées par celles que l'on obtient avec ce changement de notation des indices.

Sur la forme $(E'a)$, on voit que pour $\alpha_i = -s_i$, le premier membre de l'équation se réduit à un produit de binomes en α_j et α_k . Or, le résultat de cette substitution dans le premier membre de (E) est

$$(B_i - As_i)\alpha_j\alpha_k + (C_j - B_k s_i)\alpha_j + (C_k - B_j s_i)\alpha_k + D - C_i s_i.$$

Pour que ce polynome se décompose comme il a été dit il faut que

$$(B_i - As_i)(D - C_i s_i) - (C_j - B_k s_i)(C_k - B_j s_i) = 0,$$

ou, si on se réfère à la définition donnée au n° précédent, que

$$\varphi_i(s_i) = 0.$$

On trouverait de même que

$$\varphi_i(t_i) = 0.$$

Si donc ρ'_i et ρ''_i sont les deux racines de l'équation (φ_i) , on voit que l'équation $(E'a)$ peut s'écrire

$$(E''a) \quad M(\alpha_i + \rho'_i)(\alpha_j + \rho'_j)(\alpha_k + \rho'_k) + P(\alpha_i + \rho''_i)(\alpha_j + \rho''_j)(\alpha_k + \rho''_k) = 0.$$

Les racines ρ' et ρ'' doivent d'après cela être réelles; elles doivent aussi être inégales. Si, en effet, on avait $\rho'_i = \rho''_i$, le binome $\alpha_i + \rho_i$ se mettrait en facteur commun et l'équation se décomposerait. Donc, d'après

ce qui a été vu au n° précédent, pour que l'équation (E) soit représentable par trois systèmes linéaires non concourants il faut que le discriminant Δ soit > 0 .

On va voir que cette condition nécessaire est également suffisante en prouvant que lorsqu'elle est remplie, on obtient toujours pour M et P des valeurs réelles.

6. Il faut d'abord reconnaître le lien qui doit nécessairement exister d'une part entre les racines du groupe (ρ') , de l'autre entre les racines du groupe (ρ'') .

Sur la forme $(E''a)$ de l'équation, on voit que son premier membre devient identiquement nul pour $\alpha_i = -\rho'_i$, $\alpha_k = -\rho''_k$. Faisant cette substitution dans le premier membre de (E) et annulant le coefficient du terme en α_j , on a

$$A\rho'_i\rho''_k - B_i\rho''_k - B_k\rho'_i + C_j = 0.$$

La substitution $\alpha_j = -\rho'_j$, $\alpha_k = -\rho''_k$ donne de même

$$A\rho'_j\rho''_k - B_j\rho''_k - B_k\rho'_j + C_i = 0.$$

Eliminant ρ''_k entre ces deux dernières équations on obtient

$$E_i\rho'_i - B_iC_i = E_j\rho'_j - B_jC_j,$$

ou, en doublant les deux membres, ajoutant à chacun F_0 et tenant compte des formules (I) (n° 4),

$$2E_i\rho'_i + F_i = 2E_j\rho'_j + F_j.$$

On trouverait de même

$$2E_i\rho'_i + F_i = 2E_k\rho'_k + F_k.$$

Ces deux dernières équations peuvent s'écrire

$$\frac{d}{d\rho'_i} \varphi_i(\rho'_i) = \frac{d}{d\rho'_j} \varphi_j(\rho'_j) = \frac{d}{d\rho'_k} \varphi_k(\rho'_k).$$

Pareillement, on obtiendrait

$$\frac{d}{d\rho''_i} \varphi_i(\rho''_i) = \frac{d}{d\rho''_j} \varphi_j(\rho''_j) = \frac{d}{d\rho''_k} \varphi_k(\rho''_k).$$

On peut donc dire que les trois racines du groupe (ρ') d'une part, du groupe (ρ'') de l'autre donnent une même valeur à la dérivée du polynôme (φ) correspondant.

On peut encore remarquer, en résolvant l'équation (φ_i), que

$$2E_i\rho_i + F_i = \pm \sqrt{\Delta}.$$

Les racines d'un même groupe correspondent donc à un même signe pris pour $\sqrt{\Delta}$.

En résumé, on est libre de choisir parmi les racines de (φ_i) la racine ρ'_i et la racine ρ''_i , mais, une fois ce choix fait, les racines ρ'_j et ρ'_k d'une part, ρ'_j et ρ'_k de l'autre sont déterminées sans ambiguïté.

Remarque. Une ou plusieurs des équations (φ) peuvent avoir une racine infinie (jamais les deux, d'après la remarque finale du n° 4). Dès lors, E_i étant nul, la quantité $2E_i\rho_i + F_i$ prend la forme indéterminée $0 \times \infty$ pour la racine ρ_i infinie, mais comme elle prend la valeur parfaitement déterminée F_i pour la racine ρ_i finie, le criterium indiqué s'applique au moyen de cette seconde racine. Il est donc valable dans tous les cas.

7. Abordons maintenant le calcul de M et P . Pour cela, remarquons que l'identification de ($E''a$) et de (E) conduit à huit équations de la forme

$$MR' + PR'' = K,$$

où R' , R'' et K ont les systèmes de valeurs

$$(Y) \quad \left\{ \begin{array}{lll} R' = 1 & , & R'' = 1 & , & K = A, \\ R' = \rho'_i & , & R'' = \rho''_i & , & K = B_i, \\ \dots & , & \dots & , & \dots, \\ R' = \rho'_j \rho'_k & , & R'' = \rho''_j \rho''_k & , & K = C_i, \\ \dots & , & \dots & , & \dots, \\ R' = \rho'_i \rho'_j \rho'_k, & & R'' = \rho''_i \rho''_j \rho''_k, & & K = D. \end{array} \right.$$

Prenons deux de ces équations, distinguées par les indices 0 et 1. Nous en tirons

$$\frac{M}{R'_1 K_0 - R'_0 K_1} = \frac{P}{R'_0 K_1 - R'_1 K_0}.$$

Par suite, l'équation $(E''a)$ devient

$$(\mathfrak{A}) \quad (R_1'' K_0 - R_0'' K_1)(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') \\ - (R_1' K_0 - R_0' K_1)(\alpha_i + \rho_i'')(\alpha_j + \rho_j'')(\alpha_k + \rho_k'') = 0.$$

Nous allons voir comment cette équation peut s'adopter à tous les cas possibles caractérisés par le passage à l'infini d'une au de plusieurs racines ρ' et ρ'' .

1^{er} Cas. Les six racines ρ' et ρ'' sont finies. Dans ce cas, E_i, E_j, E_k sont différents de zéro. Nous prendrons ici dans le système (Σ)

$$R_0' = 1, \quad R_0'' = 1, \quad K_0 = A, \\ R_1' = \rho_k', \quad R_1'' = \rho_k'', \quad K_1 = B_k.$$

L'équation (\mathfrak{A}) devient alors

$$(\mathfrak{A}_1) \quad (A\rho_k'' - B_k)(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') \\ - (A\rho_k' - B_k)(\alpha_i + \rho_i'')(\alpha_j + \rho_j'')(\alpha_k + \rho_k'') = 0.$$

2^e Cas. Une racine est infinie. Soit $\rho_k'' = \infty$,¹ auquel cas $E_k = 0$. L'équation (\mathfrak{A}_1) du n° précédent, divisée par ρ_k'' , peut s'écrire

$$\left(A - \frac{B_k}{\rho_k''}\right)(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') \\ - (A\rho_k' - B_k)(\alpha_i + \rho_i'')(\alpha_j + \rho_j'')\left(\frac{\alpha_k}{\rho_k''} + 1\right) = 0.$$

Pour $\rho_k'' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_2) \quad A(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') - (A\rho_k' - B_k)(\alpha_i + \rho_i'')(\alpha_j + \rho_j'') = 0.$$

3^e Cas. Deux racines de même groupe sont infinies. Soient $\rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, auquel cas $E_j = E_k = 0$. Nous prendrons ici dans le système (Σ)

$$R_0' = 1, \quad R_0'' = 1, \quad K_0 = A, \\ R_1' = \rho_j' \rho_k', \quad R_1'' = \rho_j'' \rho_k'', \quad K_1 = C_i.$$

¹ Lorsqu'une racine est infinie on peut simplifier le calcul des autres en s'appuyant sur les remarques faites à propos des formules (IV) du n° 4.

L'équation (A) divisée par $\rho_j'' \rho_k''$ peut alors s'écrire

$$\left(A - \frac{C_i}{\rho_j'' \rho_k''}\right)(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') \\ - (A\rho_j' \rho_k' - C_i)(\alpha_i + \rho_i')\left(\frac{\alpha_j}{\rho_j''} + 1\right)\left(\frac{\alpha_k}{\rho_k''} + 1\right) = 0.$$

Pour $\rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_3) \quad A(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') - (A\rho_j' \rho_k' - C_i)(\alpha_i + \rho_i') = 0.$$

4° Cas. Deux racines de groupes différents sont infinies. Soient $\rho_j' = \rho_k'' = \infty$, auquel cas on a encore $E_j = E_k = 0$. Nous prendrons ici

$$R_0' = \rho_k', \quad R_0'' = \rho_k'', \quad K_0 = B_k, \\ R_1' = \rho_j', \quad R_1'' = \rho_j'', \quad K_1 = B_j.$$

L'équation (A) divisée par $\rho_j' \rho_k''$ peut alors s'écrire

$$\left(B_k \frac{\rho_j''}{\rho_k''} - B_j\right)(\alpha_i + \rho_i')\left(\frac{\alpha_j}{\rho_j'} + 1\right)(\alpha_k + \rho_k') \\ - \left(B_k - B_j \frac{\rho_k'}{\rho_j'}\right)(\alpha_i + \rho_i'')(\alpha_j + \rho_j'')\left(\frac{\alpha_k}{\rho_k''} + 1\right) = 0.$$

Pour $\rho_j' = \rho_k'' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_4) \quad B_j(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_k + \rho_k') + B_k(\alpha_i + \rho_i'')(\alpha_j + \rho_j'') = 0.$$

On voit qu'ici le terme en $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$ a disparu, c'est à dire que $A = 0$. C'est là ce qui distingue ce cas du précédent.

5° Cas. Les trois racines d'un même groupe sont infinies. Soient $\rho_i'' = \rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, auquel cas $E_i = E_j = E_k = 0$. Nous prendrons ici

$$R_0' = 1, \quad R_0'' = 1, \quad K_0 = A, \\ R_1' = \rho_i' \rho_j' \rho_k', \quad R_1'' = \rho_i'' \rho_j'' \rho_k'', \quad K_1 = D.$$

L'équation (\mathfrak{A}) divisée par $\rho_i'' \rho_j'' \rho_k''$ peut alors s'écrire

$$\left(A - \frac{D}{\rho_i'' \rho_j'' \rho_k''}\right)(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') \\ - (A\rho_i' \rho_j' \rho_k' - D)\left(\frac{\alpha_i}{\rho_i''} + 1\right)\left(\frac{\alpha_j}{\rho_j''} + 1\right)\left(\frac{\alpha_k}{\rho_k''} + 1\right) = 0.$$

Pour $\rho_i'' = \rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_5) \quad A(\alpha_i + \rho_i')(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') - (A\rho_i' \rho_j' \rho_k' - D) = 0.$$

6° Cas. Deux racines de l'un des groupes et une de l'autre sont infinies. Soient $\rho_i' = \rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, auquel cas on a encore $E_i = E_j = E_k = 0$. Nous prendrons ici

$$R_0' = \rho_i' \quad , \quad R_0'' = \rho_i'' \quad , \quad K_0 = B_i, \\ R_1' = \rho_j' \rho_k', \quad R_1'' = \rho_j'' \rho_k'', \quad K_1 = C_i.$$

L'équation (\mathfrak{A}) divisée par $\rho_i' \rho_j'' \rho_k''$ peut alors s'écrire

$$\left(B_i - C_i \frac{\rho_i''}{\rho_j'' \rho_k''}\right)\left(\frac{\alpha_i'}{\rho_i'} + 1\right)(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') \\ - \left(B_i \frac{\rho_j' \rho_k'}{\rho_i'} - C_i\right)(\alpha_i + \rho_i'')\left(\frac{\alpha_j}{\rho_j''} + 1\right)\left(\frac{\alpha_k}{\rho_k''} + 1\right) = 0.$$

Pour $\rho_i' = \rho_j'' = \rho_k'' = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{A}_6) \quad B_i(\alpha_j + \rho_j')(\alpha_k + \rho_k') + C_i(\alpha_i + \rho_i'') = 0.$$

On voit qu'ici encore il n'y a pas de terme en $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$, c'est à dire que $A = 0$. En outre, B_i est différent de zéro, ce qui, avec l'hypothèse faite, entraîne nécessairement $B_j = B_k = 0$.

8. *Résumé.* Si on compare à l'équation (Ea) chacune des équations de (\mathfrak{A}_1) à (\mathfrak{A}_6) , on voit que, pour $\Delta > 0$, la représentation peut être définie par les formules (a) du n° 3, les paramètres m, n, p, q étant donnés par les tableaux ci-dessous dans lesquels on les suppose rangés dans l'ordre

$$m_i, n_i, p_i, q_i,$$

$$m_j, n_j, p_j, q_j,$$

$$m_k, n_k, p_k, q_k.$$

1^{er} Cas. $E_i, E_j, E_k \neq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & \text{I} & , & \rho''_j & , \\ A\rho''_k - B_k & , & \rho'_k(A\rho''_k - B_k) & , & B_k - A\rho'_k & , & \rho''_k(B_k - A\rho'_k) & . \end{array}$$

2^e Cas. $E_i, E_j \neq 0$; $E_k = 0$:¹

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & \text{I} & , & \rho''_j & , \\ A & , & \rho'_k A & , & 0 & , & B_k - A\rho'_k & . \end{array}$$

3^e Cas. $E_i \neq 0$; $E_j, E_k = 0$; $A \neq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & 0 & , & \text{I} & , \\ A & , & \rho'_k A & , & 0 & , & C_i - A\rho'_j \rho'_k & . \end{array}$$

4^e Cas. $E_i \neq 0$; $E_j, E_k = 0$; $A = 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ 0 & , & \text{I} & , & \text{I} & , & \rho''_j & , \\ B_j & , & \rho'_i B_j & , & 0 & , & B_k & . \end{array}$$

5^e Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$; $A \neq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & , & \rho'_i & , & 0 & , & \text{I} & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & 0 & , & \text{I} & , \\ A & , & \rho'_k A & , & 0 & , & D - A\rho'_i \rho'_j \rho'_k & . \end{array}$$

6^e Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$; $A = 0$; $B_i \neq 0$:²

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & , & \text{I} & , & \text{I} & , & \rho''_i & , \\ \text{I} & , & \rho'_j & , & 0 & , & \text{I} & , \\ B_i & , & \rho'_k B_i & , & 0 & , & C_i & . \end{array}$$

¹ Dans ce cas $A \neq 0$ nécessairement; car $A = 0$, $E_k = 0$ entraînent soit $B_i = 0$, soit $B_j = 0$, par suite soit $E_j = 0$, soit $E_i = 0$.

² On vient de voir que les deux autres B sont nécessairement nuls.

**B. Équations représentables par trois systèmes
linéaires concourants.**

9. Nous avons vu que lorsque les trois systèmes linéaires sont concourants l'équation (E) est susceptible de prendre la forme $(E'b)$ qui peut encore s'écrire

$$N(\alpha_i + s_i)(\alpha_j + s_j)(\alpha_k + s_k) \\ - t_i(\alpha_j + s_j)(\alpha_k + s_k) - t_j(\alpha_k + s_k)(\alpha_i + s_i) - t_k(\alpha_i + s_i)(\alpha_j + s_j) = 0.$$

On voit que pour $\alpha_i = -s_i$, $\alpha_j = -s_j$, $\alpha_k = -s_k$, elle se décompose en un produit de binômes. Il en résulte, comme au n° 5, que s_i , s_j , s_k sont racines respectivement des équations (φ_i) , (φ_j) , (φ_k) .

Ces trois équations doivent donc encore avoir leurs racines réelles. Or, si ces racines étaient inégales l'équation (E) serait représentable par trois systèmes non concourants, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe précédent, et cela serait contraire à l'hypothèse actuelle. Chacune des équations (φ) a donc nécessairement ici ses racines égales et, par suite,

$$\Delta = 0.$$

Si ρ_i , ρ_j , ρ_k sont ces trois racines, l'équation précédente deviendra donc

$$(E''b) \quad N(\alpha_i + \rho_i)(\alpha_j + \rho_j)(\alpha_k + \rho_k) \\ - t_i(\alpha_j + \rho_j)(\alpha_k + \rho_k) - t_j(\alpha_k + \rho_k)(\alpha_i + \rho_i) - t_k(\alpha_i + \rho_i)(\alpha_j + \rho_j) = 0.$$

L'identification de cette équation et de (E) donne les huit équations

$$\begin{aligned} (1) \quad & N = A, \\ (2_i) \quad & N\rho_i - t_i = B_i, \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (3_i) \quad & N\rho_j\rho_k - t_j\rho_k - t_k\rho_j = C_i, \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (4) \quad & N\rho_i\rho_j\rho_k - t_i\rho_j\rho_k - t_j\rho_k\rho_i - t_k\rho_i\rho_j = D. \end{aligned}$$

Ayant, dans toutes ces équations, remplacé N par sa valeur (1), on tire de (2_i),

$$(5_i) \quad t_i = A\rho_i - B_i.$$

Faisons maintenant la somme de (2_i), (2_k) et (3_j) respectivement multipliées par ρ_k , ρ_i et -1 . Il vient

$$(6_j) \quad \rho_k(A\rho_i - B_i) = B_k\rho_i - C_j.$$

De même, la somme de (2_k), (3_i), (3_j) et (4), respectivement multipliées par $\rho_i\rho_j$, $-\rho_i$, $-\rho_j$ et 1 , donne

$$(7_k) \quad \rho_j(B_k\rho_i - C_j) = C_i\rho_i - D.$$

Cela posé, nous pourrions calculer t_i , t_j , t_k dans tous les cas possibles.

Remarquons d'abord que nous pouvons, au moyen de ces formules, vérifier que chaque équation (φ) a ses racines égales.

Si, en effet, entre les équations (6_k) et (7_k) nous éliminons $\rho_i\rho_j$, nous obtenons

$$(8_k) \quad E_i\rho_i + E_j\rho_j + B_kC_k - AD = 0.$$

Si maintenant, de la somme des équations (8_k) et (8_j) nous retranchons l'équation (8_i) multipliée par 2, nous obtenons

$$2E_i\rho_i + F_i = 0$$

ou

$$\frac{d}{d\rho_i} \varphi_i(\rho_i) = 0,$$

ce qui démontre que ρ_i est racine double de (φ_i) et, par suite, que $\Delta = 0$, comme nous l'avions prévu *a priori*.

Passons maintenant à l'examen des divers cas qui peuvent se présenter.

10. 1^{er} Cas. Les trois racines sont finies. Dans ce cas, E_i , E_j , E_k sont différents de zéro.

D'après (1) et (5) l'équation ($E'b$) devient

$$\frac{A\rho_i - B_i}{a_i + \rho_i} + \frac{A\rho_j - B_j}{a_j + \rho_j} + \frac{A\rho_k - B_k}{a_k + \rho_k} = A,$$

ou

$$(\mathfrak{B}_1) \quad \frac{A\rho_i - B_i}{a_i + \rho_i} + \frac{A\rho_j - B_j}{a_j + \rho_j} - \frac{Aa_k + B_k}{a_k + \rho_k} = 0.$$

2° Cas. Une des racines est infinie. Soit $\rho_k = \infty$, auquel cas $E_k = 0$. En vertu de (6_j) et (6_i) l'équation (\mathfrak{B}_1), multipliée par ρ_k , peut s'écrire

$$\frac{B_k\rho_i - C_j}{a_i + \rho_i} + \frac{B_k\rho_j - C_i}{a_j + \rho_j} - \frac{Aa_k + B_k}{\frac{a_k}{\rho_k} + 1} = 0.$$

Pour $\rho_k = \infty$, elle devient

$$\frac{B_k\rho_i - C_j}{a_i + \rho_i} + \frac{B_k\rho_j - C_i}{a_j + \rho_j} - (Aa_k + B_k) = 0$$

ou

$$(\mathfrak{B}_2) \quad \frac{B_k\rho_i - C_j}{a_i + \rho_i} - \frac{B_ka_j + C_i}{a_j + \rho_j} - Aa_k = 0.$$

3° Cas. Deux des racines sont infinies. Soient $\rho_j = \rho_k = \infty$, auquel cas $E_j = E_k = 0$.

En vertu de (7_k), l'équation (\mathfrak{B}_2) multipliée par ρ_j , peut s'écrire

$$\frac{C_i\rho_i - D}{a_i + \rho_i} - \frac{B_ka_j + C_i}{\frac{a_j}{\rho_j} + 1} - A\rho_j a_k = 0.$$

Or, pour obtenir (\mathfrak{B}_2), nous avons supposé $\rho_k = \infty$, et, d'après (6_i), pour $\rho_k = \infty$, on a $A\rho_j = B_j$. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{C_i\rho_i - D}{a_i + \rho_i} - \frac{B_ka_j + C_i}{\frac{a_j}{\rho_j} + 1} - B_j a_k = 0.$$

Pour $\rho_j = \infty$, elle devient

$$\frac{C_i\rho_i - D}{a_i + \rho_i} - (B_ka_j + C_i) - B_j a_k = 0,$$

ou

$$(\mathfrak{B}_3) \quad \frac{C_ia_i + D}{a_i + \rho_i} + B_ka_j + B_j a_k = 0.$$

4^e Cas. *Les trois racines sont infinies.* On a donc $E_i = E_j = E_k = 0$.
L'équation (\mathfrak{B}_3) , multipliée par ρ_i , s'écrit

$$\frac{C_i a_i + D}{\frac{a_i}{\rho_i} + 1} + B_k \rho_i \alpha_j + B_j \rho_i \alpha_k = 0.$$

Or, pour obtenir (\mathfrak{B}_3) nous avons supposé $\rho_j = \rho_k = \infty$, et, d'après (7_k) et (7_j) , pour $\rho_j = \rho_k = \infty$, on a $B_k \rho_i = C_j$, $B_j \rho_i = C_k$. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\frac{C_i a_i + D}{\frac{a_i}{\rho_i} + 1} + C_j \alpha_j + C_k \alpha_k = 0.$$

Pour $\rho_i = \infty$, elle devient

$$(\mathfrak{B}_4) \quad C_i \alpha_i + C_j \alpha_j + C_k \alpha_k + D = 0.$$

Ce dernier cas n'a d'ailleurs été envisagé qu'à titre de vérification, car il est de toute évidence que l'hypothèse $\Delta = E_i = E_j = E_k = 0$ entraîne nécessairement $A = B_i = B_j = B_k = 0$.

II. *Résumé.* Si on compare à l'équation (Eb) chacune des équations de (\mathfrak{B}_1) à (\mathfrak{B}_4) , on voit que, pour $\Delta = 0$, la représentation peut être définie par les formules (b) du n° 3, les paramètres m, n, p, q étant définis par les tableaux ci-dessous dans lesquels on les suppose rangés dans l'ordre

$$m_i, n_i, p_i, q_i,$$

$$m_j, n_j, p_j, q_j,$$

$$m_k, n_k, p_k, q_k.$$

1^{er} Cas. $E_i, E_j, E_k \neq 0$:

$$1, \rho_i, 0, A\rho_i - B_i,$$

$$1, \rho_j, 0, A\rho_j - B_j,$$

$$1, \rho_k, -A, -B_k.$$

2^e Cas. $E_i, E_j \neq 0; E_k = 0$:¹

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & \rho_i & , & 0 & , & B_k \rho_i - C_j, \\ 1 & , & \rho_j & , & -B_k & , & -C_i, \\ 0 & , & 0 & , & -A & , & 0. \end{array}$$

3^e Cas. $E_i \neq 0; E_j = E_k = 0$:²

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & \rho_i & , & C_i & , & D, \\ 0 & , & 1 & , & B_k & , & 0, \\ 0 & , & 1 & , & B_j & , & 0, \end{array}$$

4^e Cas. $E_i = E_j = E_k = 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & , & 1 & , & C_i & , & 0, \\ 0 & , & 1 & , & C_j & , & 0, \\ 0 & , & 1 & , & C_k & , & D. \end{array}$$

Interprétation géométrique.

12. Si, dans l'équation (E) du n° 3, on regarde α_1, α_2 et α_3 comme des coordonnées courantes, on voit que cette équation représente une surface du 3^{ième} ordre passant par les droites du plan de l'infini situés dans les plans de coordonnées, et ayant, par suite, pour points doubles les sommets du triangle \mathfrak{T} formé par ces trois droites.

Lorsque $\Delta > 0$, les plans $\alpha_i + \rho'_i = 0$ et $\alpha_j + \rho'_j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$) se coupent deux à deux suivant des droites réelles de la surface. Lorsque i et j sont différents, la droite correspondante est à distance finie et parallèle à l'axe des coordonnées α_k . Si une des racines devient infinie le plan correspondant se confond avec le plan de l'infini.

Lorsque $\Delta = 0$, $\rho'_i = \rho''_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Les deux droites parallèles à chaque axe de coordonnées se confondent en une seule, et ces

¹ Ici, comme on l'a déjà vu au n° 8, $A \neq 0$, nécessairement.

² L'équation (\mathfrak{B}_3) montre qu'ici $A = B_i = 0$.

trois droites doubles concourent en un même point qui constitue un quatrième point double de la surface. On saisit ainsi la raison géométrique de l'annulation du discriminant Δ dans ce cas.

La théorie ci-dessus présentée fournit donc un mode de représentation plane des surfaces du 3^{ième} ordre ayant trois points doubles dans le plan de l'infini. Dans ce mode de représentation, à tout point de la surface correspond une droite du plan,¹ à chaque section de la surface faite parallèlement à un des plans de coordonnées, un point coté.

Si $\Delta = 0$, la surface se décompose en le plan de l'infini et un hyperboloïde. La condition $\Delta > 0$ signifie que l'hyperboloïde est à une nappe. Lorsque $\Delta = 0$, cet hyperboloïde se réduit à un cône.

DEUXIÈME PARTIE.

13. Si nous considérons l'ensemble des trois systèmes de points cotés

$$(\alpha_i) \quad x = f_i(\alpha_i), \quad y = \varphi_i(\alpha_i), \quad t = \psi_i(\alpha_i),$$

nous en obtenons la transformation homographique la plus générale en prenant

$$(\alpha'_i) \quad x = \lambda_1 f_i + \mu_1 \varphi_i + \nu_1 \psi_i, \quad y = \lambda_2 f_i + \mu_2 \varphi_i + \nu_2 \psi_i, \quad t = \lambda_3 f_i + \mu_3 \varphi_i + \nu_3 \psi_i,$$

le déterminant de la transformation

$$H = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}$$

étant différent de zéro.

¹ Il suffirait d'appliquer une transformation dualistique pour obtenir une représentation point par point de la surface sur le plan.

Pour que les points (α'_i) forment un système régulier, il faut et il suffit que t soit constant et différent de zéro, c'est à dire que dans $\lambda_3 f_i + \mu_3 \varphi_i + \nu_3 \psi_i$ le coefficient du terme en α_i soit nul et le terme constant différent de zéro.

Nous allons rechercher maintenant si, par un choix convenable des paramètres λ, μ, ν rendant H différent de zéro, on peut réaliser la condition précédente pour les trois systèmes linéaires d'une équation (E) ou seulement pour deux et même pour un d'entre eux.

A. Équations représentables par trois systèmes linéaires non concourants.

14. Lorsqu'une équation appartient à cette catégorie ($\Delta > 0$), on peut prendre comme formules (α) les formules (a) du n° 3 où on remplace 1, 2, 3 par i, j, k . Les formules (α') sont alors

$$(\alpha'a) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = (\lambda_1 m_i + \nu_1 p_i) \alpha_i + \lambda_1 n_i + \nu_1 q_i, \\ x = (\mu_1 p_j + \nu_1 m_j) \alpha_j + \mu_1 q_j + \nu_1 n_j, \\ x = (\lambda_1 p_k + \mu_1 m_k) \alpha_k + \lambda_1 q_k + \mu_1 n_k, \\ y = (\lambda_2 m_i + \nu_2 p_i) \alpha_i + \lambda_2 n_i + \nu_2 q_i, \\ y = (\mu_2 p_j + \nu_2 m_j) \alpha_j + \mu_2 q_j + \nu_2 n_j, \\ y = (\lambda_2 p_k + \mu_2 m_k) \alpha_k + \lambda_2 q_k + \mu_2 n_k, \\ t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ t = (\mu_3 p_j + \nu_3 m_j) \alpha_j + \mu_3 q_j + \nu_3 n_j, \\ t = (\lambda_3 p_k + \mu_3 m_k) \alpha_k + \lambda_3 q_k + \mu_3 n_k. \end{array} \right.$$

Les équations exprimant que chacun de ces systèmes est régulier sont donc, d'après la remarque faite au n° précédent,

$$(\gamma a) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda_3 m_i + \nu_3 p_i = 0, & \text{avec la condition} & \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i \neq 0, \\ \mu_3 p_j + \nu_3 m_j = 0, & \text{»} & \mu_3 q_j + \nu_3 n_j \neq 0, \\ \lambda_3 p_k + \mu_3 m_k = 0, & \text{»} & \lambda_3 q_k + \mu_3 n_k \neq 0. \end{array} \right.$$

Remarquons tout d'abord qu'en vertu des conditions ci-dessus *on ne saurait admettre une solution dans laquelle plus d'un des paramètres λ_3, μ_3, ν_3 serait nul.*

Tout revient donc, dans chaque cas, à essayer de satisfaire au plus grand nombre possible des équations (γa) en observant cette condition. Mais, si cette seule condition est remplie par une solution, les trois conditions inscrites en regard des équations (γa) sont satisfaites. En effet, si, λ_3 et ν_3 n'étant pas nuls à la fois, on avait

$$\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i = 0,$$

il en résulterait $\frac{m_i}{p_i} = \frac{n_i}{q_i}$. Par suite, comme on le voit en se reportant à la forme (Ea) de l'équation (E) (n° 3), α_i disparaîtrait de cette équation. De même pour les deux autres équations (γa) .

Remarque. Pour que les trois systèmes puissent être rendus réguliers à la fois, c'est à dire pour qu'il y ait compatibilité entre les équations (γa) il faut que

$$m_1 m_2 m_3 + p_1 p_2 p_3 = 0,$$

c'est à dire, si on se reporte à (Ea) , que

$$A = 0.$$

On verra plus loin que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

15. Les équations (γa) ne contenant que les éléments de la troisième ligne du déterminant H , on peut disposer arbitrairement de ceux des deux premières lignes à la condition toutefois de ne pas rendre H identiquement nul.

Si, par exemple, λ_3 est différent de zéro (ce qui est partout le cas dans ce paragraphe), on pourra prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \mu_1 &= 0, & \nu_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 0, & \mu_2 &= 1, & \nu_2 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne $H = -\lambda_3$.

Dans cette hypothèse, les formules $(\alpha'a)$ deviennent

$$(\alpha'a_0) \begin{cases} x = p_i \alpha_i + q_i, & y = 0, & t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ x = m_j \alpha_j + n_j, & y = p_j \alpha_j + q_j, & t = (\mu_3 p_j + \nu_3 m_j) \alpha_j + \mu_3 q_j + \nu_3 n_j, \\ x = 0, & y = m_k \alpha_k + n_k, & t = (\lambda_3 p_k + \mu_3 m_k) \alpha_k + \lambda_3 q_k + \mu_3 n_k. \end{cases}$$

On voit que les supports sont pour (α_i) l'axe des x , pour (α_k) l'axe des y , pour (α_j) la droite

$$(\sigma_j) \quad \nu_3 x + \mu_3 y = 1.$$

Cela posé, nous allons chercher, sous la condition sus énoncée, à satisfaire à une ou plusieurs des équations (ηa) dans chacun des cas que nous avons été amené à considérer (n° 8).

16. 1^{er} Cas. $E_i, E_j, E_k \neq 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_1) \quad \begin{cases} \lambda_3 + \nu_3 = 0, \\ \mu_3 + \nu_3 = 0, \\ (B_k - A\rho'_k)\lambda_3 + (A\rho''_k - B_k)\mu_3 = 0. \end{cases}$$

Elle sont généralement incompatibles, mais on peut toujours satisfaire aux deux premières en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = -1.$$

Les formules $(\alpha'a_0)$ deviennent donc

$$(\alpha'a_1) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho''_i, & y = 0, & t = \rho'_i - \rho''_i, \\ x = \alpha_j + \rho'_j, & y = \alpha_j + \rho''_j, & t = \rho''_j - \rho'_j, \\ x = 0, & y = (A\rho''_k - B_k)(\alpha_k + \rho'_k), & t = (\rho''_k - \rho'_k)(A\alpha_3 + B_3). \end{cases}$$

En outre, l'équation (σ_i) est ici

$$y - x = 1.$$

Si $A = 0$, le système (α_k) devient lui-même régulier.

2° *Cas.* $E_i, E_j \neq 0; E_k = 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_2) \quad \begin{cases} \lambda_3 + \nu_3 = 0, \\ \mu_3 + \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait encore aux deux premières en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = -1.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_2) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i'', & y = 0 & , & t = \rho_i' - \rho_i'' , \\ x = \alpha_j + \rho_j', & y = \alpha_j + \rho_j'' & , & t = \rho_j'' - \rho_j' , \\ x = 0 & , & y = A(\alpha_k + \rho_k'), & t = A\alpha_k + B_k. \end{cases}$$

Ici, comme on l'a déjà remarqué au n° 8, A ne peut pas être nul, et, par suite, le troisième système n'est jamais régulier.

3° *Cas.* $E_i \neq 0; E_j, E_k = 0; A \neq 0$. Les équations (ηa) sont ici

$$(\eta a_3) \quad \begin{cases} \lambda_3 + \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait à la première et à la dernière en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 0, \quad \nu_3 = -1.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_3) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i'', & y = 0 & , & t = \rho_i' - \rho_i'' , \\ x = \alpha_j + \rho_j', & y = 1 & , & t = -(\alpha_j + \rho_j'), \\ x = 0 & , & y = A(\alpha_k + \rho_k'), & t = C_i - A\rho_j'\rho_k'. \end{cases}$$

4^e Cas. $E_i \neq 0$; $E_j, E_k = 0$; $A = 0$. Les équations (γa) sont ici

$$(\gamma a_4) \quad \begin{cases} \lambda_3 + \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait à toutes trois en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 0, \quad \nu_3 = -1.$$

Les formules (αa_0) deviennent

$$(\alpha a_4) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i'', & y = 0, & t = \rho_i' - \rho_i'', \\ x = 1, & y = \alpha_j + \rho_j'', & t = -1, \\ x = 0, & y = B_j(\alpha_k + \rho_k'), & t = B_k. \end{cases}$$

5^e Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$; $A \neq 0$. Les équations (γa) sont ici

$$(\gamma a_5) \quad \begin{cases} \lambda_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

On ne peut ici, sous la condition requise, satisfaire qu'à une seule de ces équations, par exemple à la seconde en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = 0.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_5) \quad \begin{cases} x = 1, & y = 0, & t = \alpha_i + \rho_i', \\ x = \alpha_j + \rho_j', & y = 1, & t = 1, \\ x = 0, & y = A(\alpha_k + \rho_k'), & t = A(\alpha_k + \rho_k') + D - A\rho_i'\rho_j'\rho_k'. \end{cases}$$

6° Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$; $A = 0$. Les équations (γa) sont ici

$$(\gamma a) \quad \begin{cases} \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

Cette fois on satisfait aux deux premières en posant encore

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = 0.$$

Les formules (αa_0) deviennent donc

$$(\alpha a_0) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i'', & y = 0 & , & t = 1 & , \\ x = \alpha_j + \rho_j', & y = 1 & , & t = 1 & , \\ x = 0 & , & y = B_i(\alpha_k + \rho_k'), & t = B_i(\alpha_k + \rho_k') + C_i. \end{cases}$$

B. Équations représentables par trois systèmes linéaires concourants.

17. Lorsqu'une équation appartient à cette catégorie ($\Delta = 0$), on peut prendre comme formules (α) les formules (b) du n° 3, où on remplace 1, 2, 3 par i, j, k . Les formules (α') du n° 13 deviennent alors

$$(\alpha' b) \quad \begin{cases} x = (\lambda_1 m_i + \nu_1 p_i) \alpha_i + \lambda_1 n_i + \nu_1 q_i, \\ x = (\mu_1 m_j + \nu_1 p_j) \alpha_j + \mu_1 n_j + \nu_1 q_j, \\ x = [(\lambda_1 + \mu_1) m_k - \nu_1 p_k] \alpha_k + (\lambda_1 + \mu_1) n_k - \nu_1 q_k, \\ y = (\lambda_2 m_i + \nu_2 p_i) \alpha_i + \lambda_2 n_i + \nu_2 q_i, \\ y = (\mu_2 m_j + \nu_2 p_j) \alpha_j + \mu_2 n_j + \nu_2 q_j, \\ y = [(\lambda_2 + \mu_2) m_k - \nu_2 p_k] \alpha_k + (\lambda_2 + \mu_2) n_k - \nu_2 q_k, \\ t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ t = (\mu_3 m_j + \nu_3 p_j) \alpha_j + \mu_3 n_j + \nu_3 q_j, \\ t = [(\lambda_3 + \mu_3) m_k - \nu_3 p_k] \alpha_k + (\lambda_3 + \mu_3) n_k - \nu_3 q_k. \end{cases}$$

Les équations exprimant que chacun de ces systèmes est régulier sont, d'après la remarque du n° 13,

$$(\gamma b) \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_3 m_i + \nu_3 p_i = 0, & \text{avec la condition} \quad \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i \neq 0, \\ \mu_3 m_j + \nu_3 p_j = 0, & \text{»} \quad \mu_3 n_j + \nu_3 q_j \neq 0, \\ (\lambda_3 + \mu_3) m_k - \nu_3 p_k = 0, & \text{»} \quad (\lambda_3 + \mu_3) n_k - \nu_3 q_k \neq 0. \end{array} \right.$$

On voit que ces conditions ne permettent pas d'avoir $\nu_3 = 0$, en même temps que λ_3, μ_3 ou $\lambda_3 + \mu_3$; mais on peut prendre $\lambda_3 = \mu_3 = 0$, avec $\nu_3 \neq 0$. En outre, le raisonnement déjà fait au n° 14 montre que si la condition précédente est remplie par un système de valeurs satisfaisant à une des équations (γb) , les conditions inscrites en regard des équations (γb) le sont aussi *ipso facto*.

Remarque. Pour que les trois systèmes soient réguliers, c'est à dire pour qu'il y ait compatibilité entre les équations (γb) il faut que

$$m_1 p_2 p_3 + m_2 p_3 p_1 + m_3 p_1 p_2 = 0,$$

c'est à dire, si on se reporte à (Eb) , que

$$A = 0.$$

Comme précédemment, cette condition nécessaire n'est pas suffisante, ainsi qu'on le verra par la suite.

18. Les équations (γb) ne contenant que les éléments de la troisième ligne du déterminant H , on peut disposer arbitrairement de ceux des deux premières lignes à la condition toutefois de ne pas rendre H identiquement nul.

Si, par exemple, λ_3 est différent de zéro, on pourra prendre

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0, & \mu_1 = 0, & \nu_1 = 1, \\ \lambda_2 = 0, & \mu_2 = 1, & \nu_2 = 0, \end{array}$$

ce qui donne $H = -\lambda_3$. Les formules ($\alpha'b$) deviennent alors

$$(\alpha'b_0) \left\{ \begin{array}{l} x = p_i \alpha_i + q_i, \quad y = 0, \\ x = p_j \alpha_j + q_j, \quad y = m_j \alpha_j + n_j, \\ x = -(p_k \alpha_k + q_k), \quad y = m_k \alpha_k + n_k, \\ t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ t = (\mu_3 m_j + \nu_3 p_j) \alpha_j + \mu_3 n_j + \nu_3 q_j, \\ t = [(\lambda_3 + \mu_3) m_k - \nu_3 p_k] \alpha_k + (\lambda_3 + \mu_3) n_k - \nu_3 q_k. \end{array} \right.$$

Si $\lambda_3 = 0$, mais que ν_3 soit différent de zéro, on pourra prendre

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1, & \mu_1 = 0, & \nu_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, & \mu_2 = 1, & \nu_2 = 0, \end{array}$$

ce qui donne $H = \nu_3$. Les formules ($\alpha'b$) deviennent alors

$$(\alpha'b'_0) \left\{ \begin{array}{l} x = m_i \alpha_i + n_i, \quad y = 0, \\ x = 0, \quad y = m_j \alpha_j + n_j, \\ x = m_k \alpha_k + n_k, \quad y = m_k \alpha_k + n_k, \\ t = (\lambda_3 m_i + \nu_3 p_i) \alpha_i + \lambda_3 n_i + \nu_3 q_i, \\ t = (\mu_3 m_j + \nu_3 p_j) \alpha_j + \mu_3 n_j + \nu_3 q_j, \\ t = [(\lambda_3 + \mu_3) m_k - \nu_3 p_k] \alpha_k + (\lambda_3 + \mu_3) n_k - \nu_3 q_k. \end{array} \right.$$

Cela posé, envisageons chacun des cas définis au n° 111.

19. 1^{er} Cas. $E_i, E_j, E_k \neq 0$. Les équations (γb) sont ici

$$(\gamma b_1) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 = 0. \\ \mu_3 = 0. \\ \lambda_3 + \mu_3 + A\nu_3 = 0. \end{array} \right.$$

On peut, sous les conditions requises, satisfaire dans tous les cas aux deux premières en prenant

$$\lambda_3 = 0, \quad \mu_3 = 0, \quad \nu_3 = 1.$$

Puisque λ_3 est nul et ν_3 non, il faut avoir recours aux formules $(\alpha b'_0)$ qui deviennent

$$(\alpha b_1) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i, & y = 0, & t = A\rho_i - B_i, \\ x = 0, & y = \alpha_j + \rho_j, & t = A\rho_j - B_j, \\ x = \alpha_k + \rho_k, & y = \alpha_k + \rho_k, & t = A\alpha_k + B_k. \end{cases}$$

On voit que le support de (α_k) est la droite $y = x$.

Si $A = 0$, le système (α_k) devient lui-même régulier.

2^e Cas. $E_i, E_j \neq 0; E_k = 0$. Les équations (γb) sont ici

$$(\gamma b_2) \quad \begin{cases} \lambda_3 = 0, \\ \mu_3 - B_k \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait aux deux premières en prenant

$$\lambda_3 = 0, \quad \mu_3 = B_i, \quad \nu_3 = 1.$$

Les formules $(\alpha b'_0)$ deviennent donc

$$(\alpha b_2) \quad \begin{cases} x = \alpha_i + \rho_i, & y = 0, & t = B_k \rho_i - C_i, \\ x = 0, & y = \alpha_j + \rho_j, & t = B_k \rho_j - C_j, \\ x = 1, & y = 1, & t = A\alpha_k + B_k. \end{cases}$$

Ici, ainsi qu'on l'a déjà remarqué au n° 11, A ne peut pas être nul.

3^e Cas. $E_i \neq 0$; $E_j, E_k = 0$. Les équations (γb) sont ici

$$(\gamma b_3) \quad \begin{cases} \lambda_3 + C_i \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait aux deux dernières en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = 0.$$

Comme λ_3 est différent de zéro, on a recours, cette fois, aux formules (αb_0) qui deviennent

$$(\alpha b_3) \quad \begin{cases} x = C_i \alpha_i + D, & y = 0, & t = \alpha_i + \rho_i, \\ x = B_k \alpha_j, & y = 1, & t = 1, \\ x = -B_j \alpha_k, & y = 1, & t = 2. \end{cases}$$

4^e Cas. $E_i, E_j, E_k = 0$. Les équations (γb) sont ici

$$(\gamma b_4) \quad \begin{cases} \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0. \end{cases}$$

On satisfait à toutes trois en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = 1, \quad \nu_3 = 0.$$

Les formules (αb_0) deviennent alors

$$(\alpha b_4) \quad \begin{cases} x = C_i \alpha_i, & y = 0, & t = 1, \\ x = C_j \alpha_j, & y = 1, & t = 1, \\ x = -(C_k \alpha_k + D), & y = 1, & t = 2. \end{cases}$$

20. *Résumé général.* Tous les résultats qui précèdent peuvent se résumer dans le tableau suivant où une quantité positive est désignée par +, une quantité non nulle quelconque par ϕ . Si un de ces signes

est souligné c'est qu'il découle *nécessairement* des autres hypothèses placées sur la même ligne.

Δ	E_i	E_j	E_k	A	Systèmes réguliers	Formules correspondantes
+	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	$(\alpha_i), (\alpha_j)$	(aa_1)
+	ϕ	ϕ	ϕ	\circ	$(\alpha_i), (\alpha_j), (\alpha_k)$	(aa_1)
+	ϕ	ϕ	\circ	$\underline{\phi}$	$(\alpha_i), (\alpha_j)$	(aa_2)
+	ϕ	\circ	\circ	ϕ	$(\alpha_i), (\alpha_k)$	(aa_3)
+	ϕ	\circ	\circ	\circ	$(\alpha_i), (\alpha_j), (\alpha_k)$	(aa_4)
+	\circ	\circ	\circ	ϕ	(α_j)	(aa_5)
+	\circ	\circ	\circ	\circ	$(B_i \neq \circ) (\alpha_i), (\alpha_j)$	(aa_6)
\circ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	$(\alpha_i), (\alpha_j)$	(ab_1)
\circ	ϕ	ϕ	ϕ	\circ	$(\alpha_i), (\alpha_j), (\alpha_k)$	(ab_1)
\circ	ϕ	ϕ	\circ	$\underline{\phi}$	$(\alpha_i), (\alpha_j)$	(ab_2)
\circ	ϕ	\circ	\circ	$\underline{\phi}$	$(\alpha_j), (\alpha_k)$	(ab_3)
\circ	\circ	\circ	\circ	$\underline{\circ}$	$(\alpha_i), (\alpha_j), (\alpha_k)$	(ab_4)

n° 16

n° 19

On peut donc énoncer cette proposition:

Pour qu'une équation (E) soit représentable par trois systèmes linéaires de points cotés il faut et il suffit que son discriminant Δ soit supérieur ou égal à zéro. Ces trois systèmes linéaires peuvent être rendus réguliers lorsque, A étant nul, ou bien les quantités E_i, E_j, E_k sont toutes trois différentes de zéro, ou bien, deux de ces quantités sont nulles, la troisième et Δ étant ensemble ou nuls ou non nuls.

Si E_i, E_j, E_k étant nulles, A et Δ ne le sont pas, un seul des trois systèmes linéaires peut être rendu régulier.

Dans tous les autres cas on peut rendre réguliers deux de ces systèmes.

SUR LES RAPPORTS DE L'ANALYSE PURE ET DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Conférence de M. H. Poincaré au congrès international des mathématiciens,
à Zürich, en 1897.

I.

On vous a sans doute souvent demandé à quoi servent les mathématiques et si ces délicates constructions que nous tirons tout entières de notre esprit ne sont pas artificielles et enfantées par notre caprice.

Parmi les personnes qui font cette question, je dois faire une distinction; les gens pratiques réclament seulement de nous le moyen de gagner de l'argent. Ceux-là ne méritent pas qu'on leur réponde; c'est à eux plutôt qu'il conviendrait de demander à quoi bon accumuler tant de richesses et si, pour avoir le temps de les acquérir, il faut négliger l'art et la science qui seuls nous font des âmes capables d'en jouir et propter vitam vivendi perdere causas.

D'ailleurs une science uniquement faite en vue des applications est impossible; les vérités ne sont fécondes que si elles sont enchaînées les unes aux autres. Si l'on s'attache seulement à celles dont on attend un résultat immédiat, les anneaux intermédiaires manqueront, et il n'y aura plus de chaîne.

Les hommes les plus dédaigneux de la théorie y trouvent sans s'en douter un aliment quotidien; si l'on était privé de cet aliment, le progrès s'arrêterait rapidement et nous nous figerions bientôt dans l'immobilité de la Chine.

Mais c'est assez nous occuper des praticiens intransigeants. A côté d'eux, il y a ceux qui sont seulement curieux de la nature et qui nous demandent si nous sommes en état de la leur mieux faire connaître.

Pour leur répondre, nous n'avons qu'à leur montrer les deux monuments déjà ébauchés de la Mécanique Céleste et de la Physique Mathématique.

Ils nous concéderaient sans doute que ces monuments valent bien la peine qu'ils nous ont coûtée. Mais ce n'est pas assez.

Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature.

Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.

Elles doivent aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps.

Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte nouvelle leur ouvre une perspective inattendue; et la joie qu'ils éprouvent ainsi n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y prennent aucune part? Peu de privilégiés sont appelés à la goûter pleinement, cela est vrai, mais n'est-ce pas ce qui arrive pour les arts les plus nobles.

C'est pourquoi je n'hésite pas à dire que les mathématiques méritent d'être cultivées pour elles-mêmes et que les théories qui ne peuvent être appliquées à la physique doivent l'être comme les autres.

Quand même le but physique et le but esthétique ne seraient pas solidaires, nous ne devrions sacrifier ni l'un ni l'autre.

Mais il y a plus: ces deux buts sont inséparables et le meilleur moyen d'atteindre l'un c'est de viser l'autre, ou du moins de ne jamais le perdre de vue. C'est ce que je vais m'efforcer de démontrer en précisant la nature des rapports entre la science pure et ses applications.

Le mathématicien ne doit pas être pour le physicien un simple fournisseur de formules; il faut qu'il y ait entre eux une collaboration plus intime.

La physique mathématique et l'analyse pure ne sont pas seulement des puissances limitrophes, entretenant des rapports de bon voisinage; elles se pénètrent mutuellement et leur esprit est le même.

C'est ce que l'on comprendra mieux quand j'aurai montré ce que la physique reçoit de la mathématique et ce que la mathématique, en retour, emprunte à la physique.

II.

Le physicien ne peut demander à l'analyste de lui révéler une vérité nouvelle; tout au plus celui-ci pourrait-il l'aider à la pressentir.

Il y a longtemps que personne ne songe plus à devancer l'expérience, ou à construire le monde de toutes pièces sur quelques hypothèses hâtives. De toutes ces constructions où l'on se complaisait encore naïvement il y a un siècle, il ne reste plus aujourd'hui que des ruines.

Toutes les lois sont donc tirées de l'expérience; mais pour les énoncer, il faut une langue spéciale; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis.

Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques; elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler.

Et ce n'est pas une chose indifférente qu'une langue bien faite; pour ne pas sortir de la physique, l'homme inconnu qui a inventé le mot *chaleur* a voué bien des générations à l'erreur. On a traité la chaleur comme une substance, simplement parcequ'elle était désignée par un substantif, et on l'a crue indestructible.

En revanche, celui qui a inventé le mot *électricité* a eu le bonheur immérité de doter implicitement la physique d'une loi nouvelle, celle de la conservation de l'électricité, qui, par un pur hasard, s'est trouvée exacte, du moins jusqu'à présent.

Eh bien, pour poursuivre la comparaison, les écrivains qui embellissent une langue, qui la traitent comme un objet d'art, en font en même temps un instrument plus souple, plus apte à rendre les nuances de la pensée.

On comprend alors comment l'analyste, qui poursuit un but purement esthétique, contribue par cela même à créer une langue plus propre à satisfaire le physicien.

Mais ce n'est pas tout; la loi sort de l'expérience, mais elle n'en sort pas immédiatement. L'expérience est individuelle, la loi qu'on en tire est générale; l'expérience n'est qu'approchée, la loi est précise, ou du moins prétend l'être. L'expérience se fait toujours dans des conditions complexes, l'énoncé de la loi élimine ces complications. C'est ce qu'on appelle «corriger les erreurs systématiques».

En un mot, pour tirer la loi de l'expérience, il faut généraliser; c'est une nécessité qui s'impose à l'observateur le plus circonspect.

Mais comment généraliser? toute vérité particulière peut évidemment être étendue d'une infinité de manières. Entre ces mille chemins qui s'ouvrent devant nous, il faut faire un choix, au moins provisoire; dans ce choix, qui nous guidera?

Ce ne pourra être que l'analogie. Mais que ce mot est vague! L'homme primitif ne connaît que les analogies grossières, celles qui frappent les sens, celles des couleurs ou des sons. Ce n'est pas lui qui aurait songé à rapprocher par exemple la lumière de la chaleur rayonnante.

Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine?

C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure. C'est lui qui nous a enseigné à nommer du même nom des êtres qui ne diffèrent que par la matière, à nommer du même nom par exemple la multiplication des quaternions et celle des nombres entiers.

Si les quaternions, dont je viens de parler, n'avaient été si promptement utilisés par les physiciens anglais, bien des personnes n'y verraient sans doute qu'une réverie oiseuse, et pourtant, en nous apprenant à rapprocher ce que les apparences séparent, ils nous auraient déjà rendus plus aptes à pénétrer les secrets de la nature.

Voilà les services que le physicien doit attendre de l'analyse, mais pour que cette science puisse les lui rendre, il faut qu'elle soit cultivée de la façon la plus large, sans préoccupation immédiate d'utilité; il faut que le mathématicien ait travaillé en artiste. Ce que nous lui demandons, c'est de nous aider à voir, à discerner notre chemin dans le dédale qui

s'offre à nous. Or, celui qui voit le mieux, c'est celui qui s'est élevé le plus haut.

Les exemples abondent, et je me bornerai aux plus frappants.

Le premier nous montrera comment il suffit de changer de langage pour apercevoir des généralisations qu'on n'avait pas d'abord soupçonnées.

Quand la loi de Newton s'est substituée à celle de Képler, on ne connaissait encore que le mouvement elliptique. Or, en ce qui concerne ce mouvement, les deux lois ne diffèrent que par la forme; on passe de l'une à l'autre par une simple différentiation.

Et cependant, de la loi de Newton, on peut déduire, par une généralisation immédiate, tous les effets des perturbations et toute la Mécanique Céleste. Jamais au contraire, si on avait conservé l'énoncé de Képler, on n'aurait regardé les orbites des planètes troublées, ces courbes compliquées dont personne n'a jamais écrit l'équation, comme les généralisations naturelles de l'ellipse. Les progrès des observations n'auraient servi qu'à faire croire au chaos.

Le second exemple mérite également d'être médité.

Quand Maxwell a commencé ses travaux, les lois de l'électrodynamique admises jusqu'à lui rendaient compte de tous les faits connus. Ce n'est pas une expérience nouvelle qui est venue les infirmer.

Mais en les envisageant sous un biais nouveau, Maxwell a reconnu que les équations deviennent plus symétriques quand on y ajoute un terme, et d'autre part ce terme était trop petit pour produire des effets appréciables avec les méthodes anciennes.

On sait que les vues a priori de Maxwell ont attendu vingt ans une confirmation expérimentale; ou si vous aimez mieux, Maxwell a devancé de vingt ans l'expérience.

Comment ce triomphe a-t-il été obtenu?

C'est que Maxwell était profondément imprégné du sentiment de la symétrie mathématique; en aurait-il été de même, si d'autres n'avaient avant lui recherché cette symétrie pour sa beauté propre.

C'est que Maxwell était habitué à »penser en vecteurs» et pourtant si les vecteurs se sont introduits dans l'analyse, c'est par la théorie des imaginaires. Et ceux qui ont inventé les imaginaires ne se doutaient guère du parti qu'on en tirerait pour l'étude du monde réel; le nom qu'ils leur ont donné le prouve suffisamment.

Maxwell en un mot n'était peut-être pas un habile analyste, mais cette habileté n'aurait été pour lui qu'un bagage inutile et gênant. Au contraire il avait au plus haut degré le sens intime des analogies mathématiques. C'est pour cela qu'il a fait de bonne physique mathématique.

L'exemple de Maxwell nous apprend encore autre chose.

Comment faut-il traiter les équations de la physique mathématique? devons-nous simplement en déduire toutes les conséquences, et les regarder comme des réalités intangibles? Loin de là; ce qu'elles doivent nous apprendre surtout, c'est ce qu'on peut et ce qu'on doit y changer. C'est comme cela que nous en tirerons quelque chose d'utile.

Le troisième exemple va nous montrer comment nous pouvons apercevoir des analogies mathématiques entre des phénomènes qui n'ont physiquement aucun rapport ni apparent, ni réel, de telle sorte que les lois de l'un de ces phénomènes nous aident à deviner celles de l'autre.

Une même équation, celle de Laplace, se rencontre dans la théorie de l'attraction newtonnienne, dans celle du mouvement des liquides, dans celle du potentiel électrique, dans celle du magnétisme, dans celle de la propagation de la chaleur et dans bien d'autres encore.

Qu'en résulte-t-il? Ces théories semblent des images calquées l'une sur l'autre; elles s'éclairent mutuellement, en s'empruntant leur langage; demandez aux électriciens s'ils ne se félicitent pas d'avoir inventé le mot de flux de force, suggéré par l'hydrodynamique et la théorie de la chaleur.

Ainsi les analogies mathématiques, non seulement peuvent nous faire pressentir les analogies physiques, mais encore ne cessent pas d'être utiles, quand ces dernières font défaut.

En résumé le but de la physique mathématique n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles.

Il est encore, il est surtout de lui faire connaître l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'un nouveau biais.

De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, ce sont les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir.

III.

Voyons maintenant ce que l'analyse doit à la physique.

Il faudrait avoir complètement oublié l'histoire de la science pour ne pas se rappeler que le désir de connaître la nature a eu sur le développement des mathématiques l'influence la plus constante et la plus heureuse.

En premier lieu, le physicien nous pose des problèmes dont il attend de nous la solution. Mais en nous les posant il nous a payé largement d'avance le service que nous pourrions lui rendre, si nous parvenons à les résoudre.

Si l'on veut me permettre de poursuivre ma comparaison avec les beaux-arts, le mathématicien pur qui oublierait l'existence du monde extérieur, serait semblable à un peintre qui saurait harmonieusement combiner les couleurs et les formes, mais à qui les modèles feraient défaut. Sa puissance créatrice serait bientôt tarie.

Les combinaisons que peuvent former les nombres et les symboles sont une multitude infinie. Dans cette multitude, comment choisirons-nous celles qui sont dignes de retenir notre attention? Nous laisserons-nous uniquement guider par notre caprice? Ce caprice, qui lui-même d'ailleurs ne tarderait pas à se lasser, nous entraînerait sans doute bien loin les uns des autres et nous cesserions promptement de nous entendre entre nous.

Mais ce n'est là que le petit côté de la question.

La physique nous empêchera sans doute de nous égarer. Mais elle nous préservera aussi d'un danger bien plus redoutable; elle nous empêchera de tourner sans cesse dans le même cercle.

L'histoire le prouve, la physique ne nous a pas seulement forcés de choisir entre les problèmes qui se présenteraient en foule; elle nous en a imposé auxquels nous n'aurions jamais songé sans elle.

Quelque variée que soit l'imagination de l'homme, la nature est mille fois plus riche encore. Pour la suivre, nous devons prendre des chemins que nous avons négligés et ces chemins nous conduisent souvent

à des sommets d'où nous découvrons des paysages nouveaux. Quoi de plus utile!

Il en est des symboles mathématiques comme des réalités physiques; c'est en comparant les aspects différents des choses que nous pourrions en comprendre l'harmonie intime, qui seule est belle et par conséquent digne de nos efforts.

Le premier exemple que je citerai est tellement ancien qu'on serait tenté de l'oublier; il n'en est pas moins le plus important de tous.

Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier. C'est le monde extérieur qui nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu'il nous a forcés à inventer.

Sans lui, il n'y aurait pas d'analyse infinitésimale; toute la science mathématique se réduirait à l'arithmétique ou à la théorie des substitutions.

Au contraire nous avons consacré à l'étude du continu presque tout notre temps et toutes nos forces. Qui le regrettera; qui croira que ce temps et ces forces ont été perdues?

L'analyse nous déroule des perspectives infinies que l'arithmétique ne soupçonne pas; elle vous montre d'un coup d'oeil un ensemble grandiose dont l'ordonnance est simple et symétrique; au contraire dans la théorie des nombres, où règne l'imprévu, la vue est pour ainsi dire arrêtée à chaque pas.

Sans doute on vous dira qu'en dehors du nombre entier, il n'y a pas de rigueur, et par conséquent pas de vérité mathématique; que partout il se cache, et qu'il faut s'efforcer de rendre transparents les voiles qui le dissimulent, dût-on pour cela se résigner à d'interminables redites.

Ne soyons pas si puristes et soyons reconnaissants au continu qui, si *tout* sort du nombre entier, était seul capable d'en faire *tant* sortir.

Ai-je besoin d'ailleurs de rappeler que M. Hermite a tiré un parti surprenant de l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. Ainsi le domaine propre du nombre entier est envahi lui-même et cette invasion a établi l'ordre, là où régnait le désordre.

Voilà ce que nous devons au continu et par conséquent à la nature physique.

La série de Fourier est un instrument précieux dont l'analyste fait un usage continuel; si Fourier l'a inventée, c'est pour résoudre un

problème de physique. Si ce problème ne s'était posé naturellement, on n'aurait jamais osé rendre au discontinu ses droits; on aurait longtemps encore regardé les fonctions continues comme les seules fonctions véritables.

La notion de fonction s'est par là considérablement étendue et a reçu de quelques analystes logiciens un développement imprévu. Ces analystes se sont ainsi aventurés dans des régions où règne l'abstraction la plus pure et se sont éloignés autant qu'il est possible du monde réel. C'est cependant un problème de physique qui leur en a fourni l'occasion.

Derrière la série de Fourier, d'autres séries analogues sont entrées dans le domaine de l'Analyse; elles y sont entrées par la même porte; elles ont été imaginées en vue des applications. Il me suffira de citer celles qui ont pour éléments les fonctions sphériques, ou les fonctions de Lamé.

La théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre a eu une histoire analogue; elle s'est développée surtout par et pour la physique.

Si les analystes s'étaient abandonnés à leurs tendances naturelles, voici probablement comment ils auraient envisagé ces équations et comment ils auraient choisi les conditions aux limites.

Supposons par exemple une équation entre deux variables x et y et une fonction F de ces deux variables. Ils se seraient donné F et $\frac{dF}{dx}$ pour $x = 0$. C'est ce qu'a fait par exemple M^{me} de Kowalevski dans son célèbre mémoire.

Mais il y a une foule d'autres manières de poser le problème. On peut se donner F tout le long d'un contour fermé, comme dans le problème de Dirichlet, ou se donner le rapport de F à $\frac{dF}{dn}$ comme dans la théorie de la chaleur.

Toutes ces façons de poser le problème, c'est à la physique que nous les devons. On peut donc dire que sans elle, nous ne connaîtrions pas les équations aux dérivées partielles.

Il est inutile de multiplier les exemples. J'en ai dit assez pour pouvoir conclure: quand les physiciens nous demandent la solution d'un problème, ce n'est pas une corvée qu'ils nous imposent, c'est nous au contraire qui leur devons des remerciements.

IV.

Mais ce n'est pas tout; la physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières.

Elle nous fait pressentir la solution; elle nous suggère des raisonnements.

J'ai parlé plus haut de l'équation de Laplace que l'on rencontre dans une foule de théories physiques fort éloignées les unes des autres. On la retrouve en géométrie, dans la théorie de la représentation conforme, et en analyse pure, dans celle des imaginaires.

De cette façon, dans l'étude des fonctions de variables complexes, l'analyste, à côté de l'image géométrique, qui est son instrument habituel, trouve plusieurs images physiques dont il peut faire usage avec le même succès.

Grâce à ces images, il peut voir d'un coup d'oeil ce que la déduction pure ne lui montrerait que successivement. Il rassemble ainsi les éléments épars de la solution, et par une sorte d'intuition, devine avant de pouvoir démontrer.

Deviner avant de démontrer! Ai-je besoin de rappeler que c'est ainsi que se sont faites toutes les découvertes importantes!

Combien de vérités que les analogies physiques nous permettent de pressentir et que nous ne sommes pas encore en état d'établir par un raisonnement rigoureux!

Par exemple, la physique mathématique introduit un grand nombre de développements en séries. Ces développements convergent, personne n'en doute; mais la certitude fait défaut.

Ce sont autant de conquêtes assurées pour les chercheurs qui viendront après nous.

La Physique, d'autre part, ne nous fournit pas seulement des solutions; elle nous fournit encore, dans une certaine mesure, des raisonnements.

Il me suffira de rappeler comment M. Klein, dans une question relative aux surfaces de Riemann, a eu recours aux propriétés des courants électriques.

Il est vrai que les raisonnements de ce genre ne sont pas rigoureux, au sens que l'analyste attache à ce mot.

Et à ce propos, une question se pose: comment une démonstration, qui n'est pas assez rigoureuse pour l'analyste, peut-elle suffire au physicien? Il semble qu'il ne peut y avoir deux rigueurs, que la rigueur est ou n'est pas, et que, là où elle n'est pas, il ne peut y avoir de raisonnement.

On comprendra mieux ce paradoxe apparent, en se rappelant dans quelles conditions le nombre s'applique aux phénomènes naturels.

D'où proviennent en général les difficultés que l'on rencontre quand on recherche la rigueur? On s'y heurte presque toujours en voulant établir que telle quantité tend vers telle limite, ou que telle fonction est continue, ou qu'elle a une dérivée.

Or les nombres que le physicien mesure par l'expérience ne lui sont jamais connus qu'approximativement; et, d'autre part, une fonction quelconque diffère toujours aussi peu que l'on veut d'une fonction discontinue, et en même temps elle diffère aussi peu que l'on veut d'une fonction continue.

Le physicien peut donc supposer à son gré, que la fonction étudiée est continue, ou qu'elle est discontinue; qu'elle a une dérivée, ou qu'elle n'en a pas; et cela sans crainte d'être jamais contredit, ni par l'expérience actuelle, ni par aucune expérience future. On conçoit, qu'avec cette liberté, il se joue des difficultés qui arrêtent l'analyste.

Il peut toujours raisonner comme si toutes les fonctions qui s'introduisent dans ses calculs étaient des polynomes entiers.

Ainsi l'aperçu qui suffit à la Physique n'est pas le raisonnement qu'exige l'Analyse. Il ne s'en suit pas que l'un ne puisse aider à trouver l'autre.

On a déjà transformé en démonstrations rigoureuses tant d'aperçus physiques que cette transformation est aujourd'hui facile.

Les exemples abonderaient si je ne craignais, en les citant, de fatiguer votre attention et si cette conférence n'était déjà trop longue.

J'espère en avoir assez dit pour montrer que l'Analyse pure et la Physique mathématique peuvent se servir l'une l'autre sans se faire l'une à l'autre aucun sacrifice et que chacune de ces deux sciences doit se réjouir de tout ce qui élève son associée.

ACTA MATHEMATICA

INHALTSVERZEICHNISS DER ZWANZIG ERSTEN BÄNDE

NEBST

NAMENREGISTER DER BÄNDE 11 BIS 20.

TABLE DES MATIÈRES CONTENUES
DANS LES VINGT PREMIERS VOLUMES

SUIVIE

D'UNE TABLE GÉNÉRALE PAR NOMS D'AUTEURS
DES VOLUMES 11—20.

Inhalts-Verzeichniss. — Table des matières.

Band 1. — Tome 1.

1882.

Seite. Page.

Dedikation. — Dédicace.

Vorrede. — Avertissement.

Théorie des groupes fuchsien, par <i>H. Poincaré</i>	1— 62
Zur Theorie der Leibrenten, von <i>C. J. Malmsten</i>	63— 76
Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper, von <i>Hugo Gylden</i> ..	77— 92
Das Problem der Configurationen, von <i>Th. Reye</i>	93— 96
Die Hexaëder- und die Octaëderconfigurationen (12_6 , 16_3), von <i>Th. Reye</i> ...	97—108
Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x , y), par <i>P. Appell</i> ..	109—131
Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x , y). (Second mémoire), par <i>P. Appell</i>	132—144
Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle, par <i>P. Appell</i>	145—152
Zur Theorie der quadratischen Reste, von <i>Ernst Schering</i>	153—170
Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative, par <i>H. G. Zeuthen</i>	171—188
Sur un théorème de M. Hermite. Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite, par <i>E. Goursat</i>	189—192
Mémoire sur les fonctions fuchsien, par <i>H. Poincaré</i>	193—294
Note sur les intégrales Eulériennes. Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite, par <i>L. Bourguet</i>	295—296
Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions, par <i>Emile Picard</i>	297— 320

	Seite. Page.
Über lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen, von <i>L. Fuchs</i>	321—362
Sur quelques intégrales définies. Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite, par <i>L. Bourguet</i>	363—367
Sur une relation donnée par M. Cayley, dans la théorie des fonctions elliptique. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler, par <i>Ch. Hermite</i>	368—370
Zur Theorie der Discriminanten, von <i>Eugen Netto</i>	371—399
Bild von N. H. Abel. — Portrait de N. H. Abel.	
Eine Figurentafel. — Une planche.	
Inhalt. — Table des matières.	

Band 2. — Tome 2.

1883.

Sur une classe des fonctions représentées par des intégrales définies, par <i>E. Goursat</i>	1—70
Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes, par <i>P. Appell</i>	71—80
Sur une espèce de courbes symétriques de la sixième classe, par <i>C. Crone</i>	81—96
Sur les fonctions de deux variables, par <i>H. Poincaré</i>	97—113
Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires, par <i>Emile Picard</i>	114—135
Zur Theorie der Raumcurven, von <i>H. Valentiner</i>	136—230
Über die transcendente Function $Q(x) = I(x) - P(x)$. Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler, von <i>Hjalmar Mellin</i>	231—232
Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublements périodiques, par <i>M. Elliot</i>	233—260
Sur les intégrales Eulériennes et quelques autres fonctions uniformes, par <i>L. Bourguet</i>	261—295
Sur la fonction Eulérienne, par <i>L. Bourguet</i>	296—298
Sur quelques points dans la théorie des nombres, par <i>Ch. Hermite</i> et <i>R. Lipschitz</i>	
1. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Lipschitz	299—300
2. Extrait d'une lettre de M. Lipschitz à M. Hermite	301—304
Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels, par <i>G. Cantor</i> (traduction d'un mémoire publié dans le journal de Borchardt, t. 77, p. 258)	305—310
Une contribution à la théorie des ensembles, Mémoire de <i>G. Cantor</i> . (Extrait du journal de Borchardt, t. 84)	311—328

	Seite. Page.
Sur les séries trigonométriques, par <i>G. Cantor</i> (traduction d'un mémoire publiés dans les Annales mathématiques de Leipsic, t. 4, p. 139)	329—335
Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques, par <i>G. Cantor</i> (traduction d'un mémoire publié dans les Annales mathématiques de Leipsic, t. 5, p. 123)	336—348
Sur les ensembles infinis et linéaires de points, par <i>G. Cantor</i> . (Première partie. Extraite des Annales mathématiques de Leipsic, t. 15)	349—356
Sur les ensembles infinis et linéaires de points, par <i>G. Cantor</i> . (Seconde partie. Extraite des Annales mathématiques de Leipsic, t. 17)	357—360
Sur les ensembles infinis et linéaires de points, par <i>G. Cantor</i> . (Troisième partie. Extraite d'un mémoire des Annales mathématiques de Leipsic, t. 20, p. 113)	361—371
Sur les ensembles infinis et linéaires de points, par <i>G. Cantor</i> . (Quatrième partie. Extraite d'un mémoire publié dans les Annales mathématiques de Leipsic, t. 21, p. 51)	372—380
Fondements d'une théorie générale des ensembles, par <i>G. Cantor</i> . (Extrait d'un article des Annales mathématiques de Leipsic, t. 21, p. 545)	381—408
Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à N dimensions. Première communication. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur, par <i>G. Cantor</i>	409—414
Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. Extrait d'une lettre adressée à M. Cantor à Halle, par <i>Ivar Bendixson</i>	415—429
Vier Figurentafeln. — Quatre planches.	
Inhalt. — Table des matières.	

Band 3. — Tome 3.

1883—1884.

Über die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten, von <i>Leo Königsberger</i>	1— 48
Mémoire sur les groupes kleinéens, par <i>H. Poincaré</i>	49— 92
Sur la transformation des fonctions elliptiques, par <i>Martin Krause</i>	93— 96
Une question de rentes viagères, par <i>L. Lindelöf</i>	97—101
Eine Verallgemeinerung der Gleichung	

$$I(1+x)I(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler, von *Hjalmar Mellin* 102—104

Sur l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[2\nu \frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2 \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} \right] \frac{dy}{dx} \\ = \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} (n_3 - \nu_2)(n_3 + \nu_2 + 1) + \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} (n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1) \right. \\ \left. + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x} (n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) + k^2 \operatorname{sn}^2 x (n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h \right] y,$$

équation où ν, ν_1, ν_2 désignent des nombres quelconques, n, n_1, n_2, n_3 des nombres entiers positifs ou négatifs, et h une constante arbitraire. Premier mémoire, par *C^{te} de Sparre* 105—140

Sur les couches de niveau électromagnétiques, par *E. Beltrami*..... 141—152

Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre, par *Martin Krause* 153—180

Sur les surfaces du troisième ordre, par *C. Le Paige* 181—200

Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel, von *F. Prym* 201—215

Ableitung einer allgemeinen Thetaformel, von *F. Prym*..... 216—239

Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel, von *A. Krazer* und *F. Prym* 240—276

Note sur certaines équations différentielles linéaires, par *Adolph Steen* 277—282

Sur le multiplicateur des fonctions hyperelliptiques de premier ordre, par *Martin Krause* 283—288

Sur l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[2\nu \frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2 \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} \right] \frac{dy}{dx} \\ = \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} (n_3 - \nu_2)(n_3 + \nu_2 + 1) + \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} (n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1) \right. \\ \left. + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x} (n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) + k^2 \operatorname{sn}^2 x (n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h \right] y,$$

équation où ν, ν_1, ν_2 désignent des nombres quelconques, n, n_1, n_2, n_3 les nombres entiers positifs ou négatifs, et h une constante arbitraire. Deuxième mémoire, par *C^{te} de Sparre* 289—321

Über gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte.

Aus einem Brief an Herrn G. Mittag-Leffler, von *Hjalmar Mellin* 322—324

Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre, par *G.-H. Halphen*..... 325—380

Inhalt. — Table des matières.

Errata.

Band 4. — Tome 4.

1884.

	Seite. Page.
Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante, par <i>G. Mittag-Leffler</i>	1— 79
Démonstration nouvelle du théorème de Laurent, par <i>G. Mittag-Leffler</i> ...	80— 88
Sur un développement en fraction continue, par <i>Ch. Hermite</i> et <i>L. Fuchs</i>	
1. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite par M. Fuchs	89— 90
2. Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs par M. Hermite	91— 92
Sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre des systèmes orthogonaux, par <i>Gaston Darboux</i>	93— 96
Sur quelques points de la théorie des équations numériques, par <i>E. Laguerre</i>	97—120
Recherches hydrodynamiques. Premier mémoire: Les équations hydrodynamiques et les relations supplémentaires, par <i>C. A. Bjerknes</i>	121—170
Sur la généralisation d'une formule d'Abel, par <i>N. Sonine</i>	171—176
Untersuchungen über die Lage der Brennpunkte eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegeneinander und gegen einen Hauptstrahl, von <i>Ludwig Mathiessen</i>	177—192
Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques, par <i>Ch. Hermite</i> et <i>R. Lipschitz</i>	
1. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Lipschitz	193—193
2. Extrait d'une lettre de M. Lipschitz à M. Hermite	194—196
Démonstration du théorème de Cauchy. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite par <i>E. Goursat</i>	197—200
Sur les groupes des équations linéaires, par <i>H. Poincaré</i>	201—312
Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta F = 0$, par <i>P. Appell</i>	313—374
Beweis des Laurent'schen Satzes, von <i>Ludwig Scheeffer</i>	375—380
De la puissance des ensembles parfaits de points. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur, par <i>G. Cantor</i>	381—392
Über die Reduktion einer bestimmten Classe Abel'scher Integrale 3 ^{ten} Ranges auf elliptische Integrale, von <i>Sophie Kowalevski</i>	393—414
Zu Eulers Recursionsformel für die Divisorensummen. Aus einer Zuschrift an den Herausgeber, von <i>Chr. Zeller</i>	415—416
Inhalt. — Table des matières.	

Band 5. — Tome 5. 1884—1885.

Seite. Page:

Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \cdot \Delta u'_x + \frac{B_1 \cdot h^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta u^{IV}_x + \text{etc.},$$

par <i>C. J. Malmsten</i>	1— 46
Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre, von <i>Edvard Phragmén</i>	47— 48
Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven, von <i>Ludwig Schaeffer</i>	49— 82
Einige Anzahlen für Kegelflächen, von <i>H. Krey</i>	83— 96
Sur une classe d'intégrales doubles, par <i>E. Goursat</i>	97—120
Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes, par <i>Emile Picard</i>	121—182
Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen, von <i>Ludwig Schaeffer</i>	183—194
Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre, par <i>C. Le Paige</i>	195—202
Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique. Extrait d'une lettre à M. C. Le Paige, par <i>H.-G. Zeuthen</i>	203—204
Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen, von <i>H. Schroeter</i> . (Auszug aus einem Schreiben an Herrn G. Mittag-Leffler)	205—208
Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, par <i>H. Poincaré</i>	209—278
Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen, von <i>Ludwig Schaeffer</i> . (Fortsetzung von Bd. 5, p. 183—194)	279—296
Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques, par <i>Ch. Hermite</i> . (Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, t. 29).....	297—330
Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen, von <i>Wilh. Fiedler</i>	331—408
Berichtigung (zur Abhandlung von H. Krey, p. 83—96).	
Zwei Figurentafeln. — Deux planches.	
Inhalt. — Table des matières.	

Band 6. — Tome 6.

1885.

	Seite. Page.
Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination, par <i>J. Molk</i>	1—166
Über den Begriff der Länge einer Curve. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Ludwig Scheeffer über Rectification der Curven, von <i>P. du Bois-Reymond</i>	167—168
Sur la théorie des fonctions elliptiques, par <i>K. Weierstrass</i> . Traduit de l'allemand par <i>A. Pautonnier</i> à Paris	169—228
Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, von <i>C. Runge</i>	229—248
Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln, von <i>Sophie Kowalevski</i>	249—304
Entwicklung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten, von <i>C. Runge</i>	305—318
Un théorème d'algèbre. Extrait d'une lettre adressée à <i>M. Hermite</i> par <i>T.-J. Stieltjes</i>	319—326
Eine Bemerkung über Divisorensommen, von <i>M. A. Stern</i>	327—328
Zur Theorie der elliptischen Functionen, von <i>H. Weber</i>	329—416
Inhalt. — Table des matières.	

Band 7. — Tome 7.

1885—1886.

Ankündigung des Preisausschreibens Seiner Majestät des Königs Oscar II. — Avertissement sur le concours institué par S. M. le Roi Oscar II...	I—VI
Sur un théorème de <i>M. Fuchs</i> , par <i>H. Poincaré</i>	1— 32
Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques, par <i>Edvard Phragmén</i>	33— 42
Über die Begrenzungen von Continua, von <i>Edvard Phragmén</i>	43— 48
Über Systeme von Plancurven, von <i>H. Krey</i>	49— 94
Déduction arithmétique d'une relation due à <i>Jacobi</i> . Extrait d'une lettre adressée à <i>M. Hermite</i> , par <i>R. Lipschitz</i>	95—100
Zur Theorie der Elimination, von <i>E. Netto</i>	101—104
Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punctmengen in einem n -fach ausgedehnten stetigen Raume G_n . Zweite Mittheilung von <i>Georg Cantor</i>	105—124

	Seite. Page.
Die intermediäre Bahn des Mondes, von <i>Hugo Gylden</i>	125—172
Über die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5 + ux + v = 0$, von C. Runge	173—186
Über $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$ und verwandte Integrale, von <i>L. Schläfli</i>	187—196
Beweis eines Satzes aus der Theorie der elliptischen Functionen, von <i>M. Falk</i>	197—200
Untersuchungen über quadratische Formen. I. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält, von <i>Hermann Minkowski</i>	201—258
Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, par <i>H. Poincaré</i>	259—380
Note sur une intégrale définie, par <i>S. Pincherle</i>	381—386
Über die Darstellung willkürlicher Functionen. Auszug eines Briefes an Herrn G. Mittag-Leffler, von <i>C. Runge</i>	387—392
Bildniss von Weierstrass. — Portrait de Weierstrass.	
Announce de la mort de MM. Hjalmar Holmgren et C. J. Malmsten.	
Inhalt. — Table des matières.	

Band 8. — Tome 8.

1886.

On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, by <i>G. W. Hill</i>	1— 36
Zur Theorie der Gammafunction, von <i>Hj. Mellin</i>	37— 80
Über hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung, von <i>Otto Staude</i>	81— 92
Sur un théorème de M. Hermite relatif à la fonction $E(x)$, par <i>M. A. Stern</i>	93— 96
Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension, von <i>H. Schubert</i>	97—118
Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen, von <i>E. A. Stenberg</i>	119—154
Beweis des Satzes dass eine jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat, von <i>Elling Holst</i>	155—160
Über die reductiblen algebraischen Curven, von <i>M. Noether</i>	161—192
Theorie der Abel'schen Zahlkörper, von <i>H. Weber</i>	193—263
Preisauflage der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1889	264—264
Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la physique mathé- matique, par <i>P. Appell</i>	265—294

	Seite. Page.
Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, par <i>H. Poincaré</i>	295—344
Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. (Premier mémoire), par <i>F. Casorati</i>	345—359
Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales elliptiques de 2 ^{me} et 3 ^{me} espèce (Deuxième mémoire), par <i>F. Casorati</i>	360—386
Sur les unités électriques. Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur par <i>J. Bertrand</i>	387—392
Inhalt. — Table des matières.	
Erratum.	
Corrrection.	

Band 9. — Tome 9.

1886—1887.

Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss, par <i>I. Bendixson</i>	1— 34
Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux, par <i>P. Tchebycheff</i> . (Traduit du russe par Sophie Kowalevski).....	35— 56
Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchebycheff, par <i>A. Markoff</i>	57— 70
Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations, par <i>Gino Loria</i>	71— 72
Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien dargestellt mit Hilfe von Thetafunktionen zweier Variablen, von <i>Hermann Dobriner</i>	73—104
Theorie der Abel'schen Zahlkörper, von <i>H. Weber</i>	105—130
Kalender-Formeln, von <i>Chr. Zeller</i>	131—136
Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzgleichungen, von <i>Hj. Mellin</i>	137—166
NOTE sur un développement de l'intégrale $\int_0^a e^{x^2} dx$, par <i>T.-J. Stieltjes</i>	167—176
Einige Sätze über Summen von Divisoren, von <i>Jacob Hacks</i>	177—181
Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs. Lettre adressée à Madame Sophie Kowalevski, par <i>P. Tchebycheff</i>	182—184
Untersuchungen über die Convergenz der Reihen welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden, von <i>H. Gylden</i>	185—294
Über orthogonale Substitutionen, von <i>E. Netto</i>	295—300
Déduction de quelques formules analytiques d'un théorème élémentaire de la théorie des nombres, par <i>A. Berger</i>	301—320

	Seite. Page.
Sur les résidus des intégrales doubles, par <i>H. Poincaré</i>	321—380
Über ein Theorem des Herrn Tisserand aus der Störungstheorie, von <i>And. Lindstedt</i>	381—384
Sur les racines de l'équation $X_n = 0$, par <i>T.-J. Stieltjes</i>	385—400
Inhalt. — Table des matières.	
Errata.	

Band 10. — Tome 10.

1887.

Über Summen von grössten Ganzen, von <i>Jacob Hacks</i>	1—52
Sur la valeur de quelques séries qui dépendent de la fonction $E(x)$, par <i>M. A. Stern</i>	53—56
Über gewisse trinomische komplexe Zahlen, von <i>K. Schwering</i>	57—86
Un théorème de la théorie des séries. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler, par <i>M. Lerch</i>	87—88
Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution, par <i>Gustaf Kobb</i>	89—108
Über die Bedeutung des Princip der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme, von <i>Karl Bohlin</i>	109—130
Zur Theorie der krummen Oberflächen, von <i>R. Lipschitz</i>	131—136
Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen, von <i>R. Lipschitz</i> ...	137—144
Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien, von <i>Hermann Dobriner</i>	145—152
Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies, par <i>S. Pincherle</i>	153—182
Über eine Gattung transcenderter Raumcoordinaten, von <i>Otto Staude</i>	183—200
Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers, par <i>L. Lecornu</i>	201—280
Sur les intégrales algébriques de différentielles algébriques, par <i>G. Humbert</i>	281—298
Tables des valeurs des sommes $S_k = \sum_{i=1}^{\infty} n^{-k}$, par <i>T.-J. Stieltjes</i>	299—302
Zur Theorie des Flächenpotentials, von <i>J. Weingarten</i>	303—309
Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Réponse à M. Thomé, par <i>H. Poincaré</i>	310—312
Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments, par <i>G. Koenigs</i>	313—338

	Seite. Page.
Sur un cas spécial de l'équation différentielle de Lamé, par <i>E. A. Stenberg</i>	339—348
Inhaltsverzeichniss der Bände 1—10, bearbeitet von G. Eneström. — Table des matières des tomes 1—10 composée par G. Eneström.....	349—397
Inhalt. — Table des matières.	
Erratum.	
Verbesserungen.	

Band II. — Tome II.

1887—1888.

Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag- Leffler par <i>Emile Picard</i>	1— 12
Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionen- theoretischer Anwendung, von <i>Emil Strauss</i>	13— 18
Note sur la fonction $\mathfrak{A}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{(w+k)^s}$, par <i>M. Lerch</i>	19— 24
Über die Integrale des Vielkörper-Problems, von <i>H. Bruns</i>	25— 96
Zur Theorie der mehrwerthigen, mehrfach linear verknüpften Functionen, von <i>Karl Heun</i>	97—118
Eine Eigenschaft der Primzahl 107, von <i>K. Schwering</i>	119—120
On the division of space with minimum partitional area, by <i>Sir William Thomson</i>	121—134
Sur un mode de transformation des surfaces minima, par <i>E. Goursat</i>	135—186
Über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche, von <i>A. Hurwitz</i>	187—200
Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier, par <i>L. Sylow</i>	201—256
Sur un mode de transformation des surfaces minima (Second mémoire), par <i>E. Goursat</i>	257— 264
Untersuchungen über die Normen complexer Zahlen, von <i>K. Schwering</i> ...	265—296
Démonstration du théorème fondamental de Galois dans la théorie de la résolution algébrique des équations, par <i>J. T. Söderberg</i>	297—302
Über die Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche, von <i>Otto Staudé</i>	303—332
Zur Theorie der elliptischen Functionen (Zweite Abhandlung), von <i>H. Weber</i>	333—390
Bemerkung über diejenigen Flächen bei denen die Differenz der Haupt- krümmungsradien constant ist, von <i>R. v. Lilienthal</i>	391—394

	Seite. Page.
Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques, par <i>J. Ptazyski</i>	395—400
Prix Oscar II. Mémoires présentés au concours	401—402
Annonce de la mort de H. T. Daug.	
Eine Figurentafel. — Une planche de figures.	
Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.	

Band 12. — Tome 12.

1889.

Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe, par <i>P. Appell</i>	1— 50
Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques, par <i>M. Lerch</i>	51— 56
Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, par <i>C. Guichard</i>	57— 62
Über gewisse ebene Configurationen, von <i>J. de Vries</i>	63— 82
Sur l'équation du sixième degré, par <i>F. Brioschi</i>	83—102
Bemerkungen zur Theorie der mehrfach linear verknüpften Functionen, von <i>Karl Heun</i>	103—108
Scherings Beweis des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste, dar- gestellt mit Hülfe des Zeichens $[x]$, von <i>Jacob Hacks</i>	109—112
Über ein System linearer partieller Differentialgleichungen, von <i>I. Horn</i> ...	113—176
Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, par <i>Sophie Kowalevski</i>	177—232
Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Premier mémoire, par <i>Vito Volterra</i>	233—286
Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales, par <i>P. Tchebycheff</i>	287—322
Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, par <i>Emile Picard</i>	323—338
Über das räumliche Achteck welches die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden, von <i>H. Dobriner</i>	339—361
Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre, par <i>H.-G. Zeuthen</i>	362—366
Über eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Grössen, von <i>A. Hurwitz</i>	367—405
Annonce de la mort de O.-J. Broch.	
Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.	

Band 13. — Tome 13.

1890.

Seite. Page.

Dedikation. — Dédicace.

Avant-propos.

- Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, par
H. Poincaré. Mémoire couronné du prix de S. M. le Roi Oscar II
 le 21 janvier 1889 1—270

Erratum.

- Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au dé-
 veloppement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques, par
P. Appell. Mémoire couronné par S. M. le Roi Oscar II le 21
 janvier 1889 1—174

Inhaltsverzeichnis. — Table des matières.

(pagination spéciale).

Band 14. — Tome 14.

1890—1891.

- Über einige Grundgebilde der projectiven Geometrie, von *C. Juel*..... 1— 30
- Über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung in welchen
 die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt, von *Walther Raschke* 31— 80
- Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rota-
 tion d'un corps solide autour d'un point fixe, par *Sophie Kowalevski* 81— 94
- Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Ses rapports
 avec les mesures de courbure Gaussienne et moyenne, par *F. Casorati* 95—110
- Bestimmung einer Klasse von Berührungstransformationsgruppen des dreifach
 ausgedehnten Raumes, von *Georg Scheffers* 111—178
- Beweis der Existenz des Potentials das an der Grenze des betrachteten
 Raumes gegebene Werthe hat für den Fall dass diese Grenze eine
 überall convexe Fläche ist, von *Gustav Kirchhoff*..... 179—184
- On a funicular solution of Buffon's »Problem of the needle» in its most
 general form, by *J. J. Sylvester*..... 185—206
- Über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung. Auszug
 eines Schreibens an Herrn H. G. Zeuthen von *H. Schroeter* 207—210
- Über beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten
 und vorgeschriebenen Nullstellen, von *A. Hurwitz* 211—216

	Seite. Page.
Über die Diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null, von <i>D. Hilbert</i> und <i>A. Hurwitz</i>	217—224
Remarques sur la théorie de la représentation conforme, par <i>E. Phragmén</i>	225—232
Les invariants des équations différentielles linéaires, par <i>F. Brioschi</i>	233—248
Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli, par <i>A. Berger</i> ...	249—304
Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités, par <i>P. Tchebycheff</i>	305—316
Über die Darstellung der Determinante eines Systems welches aus zwei an- deren componist ist, von <i>K. Hensel</i>	317—320
Über die Classenanzahl der zu einer negativen Determinante $D = -q$ ge- hörigen eigentlich primitiven quadratischen Formen, wo q eine Prim- zahl von der Form $4n + 3$ ist, von <i>Jacob Hacks</i>	321—328
Einige Anwendungen der Function $[x]$, von <i>Jacob Hacks</i>	329—336
Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differential- gleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen, von <i>I. Horn</i>	337—348
Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en mouvement, par <i>H. Hertz</i>	349—376
Annonce de la mort de Sophie Kowalevski et de L. Lorenz.	
Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.	

Band 15. — Tome 15.

1891.

Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène, par <i>G. Mittag-Leffler</i>	1— 32
Sur un problème de représentation conforme, par <i>Gustav Cassel</i>	33— 44
Sur un théorème de M. Bruns, par <i>Sophie Kowalevski</i>	45— 52
Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires, par <i>Helge von Koch</i>	53— 64
Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes, par <i>Hugo Gylden</i>	65—190
Sur la courbure des surfaces. Lettre adressée à M. Casorati, par <i>E. Catalan</i>	191—192
Die Theorie der regulären graphs, von <i>Julius Petersen</i>	193—220
Über eine numerische Berechnung der Argumente der cyklischen, hyper- bolischen und elliptischen Functionen, von <i>C. Runge</i>	221—248
Über die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamental- gleichungen, von <i>J. Knoblauch</i>	249—258

Über die allgemeine Form der eindeutigen Integrale der linearen homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten, von <i>E. A. Stenberg</i>	259—278
Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm. Extrait d'une lettre de M. <i>Mittag-Leffler</i> à M. Poincaré	279—280
Sur des équations différentielles lineaires transformables en elles-même par un changement de fonction et de variable, par <i>P. Appell</i>	281—316
Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung, von <i>Hj. Mellin</i>	317—384
Eine Figurentafel. — Une planche de figures.	
Inhaltsverzeichnis. — Table des matières.	

Band 16. — Tome 16.

1892.

Über Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie, von <i>Kasimir Żoravski</i>	1— 64
Sur les maxima et les minima des intégrales doubles, par <i>Gustaf Kobb</i> ...	65—140
Notiz über eine Methode zur numerischen Umkehrung gewisser Transcendenten, von <i>Th. Lohnstein</i>	141—142
Zur Theorie des Krümmungsmaasses der Flächen, von <i>R. von Lilienthal</i>	143—152
Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents, par <i>Vito Volterra</i>	153—216
Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires, par <i>Helge von Koch</i>	217—296
Sur la polarisation par diffraction, par <i>H. Poincaré</i>	297—340
Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle, par <i>S. Pincherle</i>	341—264
Expression complète et signification véritable de la nutation initiale. Démonstration qui en résulte de la fluidité intérieure du globe. Conséquences analytiques de celle-ci dans les formules de l'astronomie, par <i>F. Folie</i>	365—384
Sophie Kovalevsky. Notice biographique par <i>G. Mittag-Leffler</i>	385—392
Bild von Sophie Kovalevsky. Portrait de Sophie Kovalevsky.	
Inhaltsverzeichnis. — Tables des matières.	
Errata.	

Band 17. — Tome 17.

1893.

	Seite. Page.
Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes, par <i>Hugo Gylden</i> (suite et fin)	1—168
Über ternäre definite Formen, von <i>David Hilbert</i>	169—198
Zwei Determinantensätze, von <i>E. Netto</i>	199—204
Über einige für Primzahlen charakteristische Beziehungen, von <i>Jacob Hacks</i>	205—208
Sur le cas traité par M ^{me} Kowalevski de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe, par <i>Fritz Kötter</i>	209—264
Zur Theorie der linearen Substitutionen, von <i>E. Netto</i>	265—280
Über lineare Relationen zwischen Thetaproducten, von <i>A. Krazer</i>	281—296
Remarques sur les équations différentielles. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler, par <i>E. Picard</i>	297—300
Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers, par <i>J.-P. Gram</i>	301—314
Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller ungeraden Primzahlen p unter 3000, von <i>G. Wertheim</i>	315—320
Sur les maxima et les minima des intégrales doubles, second mémoire, par <i>Gustaf Kobb</i>	321—344
Entwicklungen zur Transformation fünfter und siebenter Ordnung einiger specieller automorpher Functionen, von <i>Robert Fricke</i>	345—396
Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.	

Band 18. — Tome 18.

1894.

Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformation, par <i>Ar. Tresse</i>	1— 88
Sur la théorie des caisses de pension, par <i>L. Lindelöf</i>	89— 96
Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles, par <i>Henri Padé</i>	97—112
Angenäherte Darstellung der Quadratwurzel einer Veränderlichen mittelst einfacher Brüche, von <i>P. Tchebycheff</i> . Aus dem Russischen über- setzt von O. Backlund	113—132

Sur une classe de transcendentes nouvelles, par <i>Emile Picard</i> (Premier mémoire)	133—151
Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms, von <i>David Hilbert</i>	155—160
Sur les vibrations des corps élastiques isotropes, par <i>Vito Volterra</i>	161—232
Sur l'intégration de l'équation différentielle $y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y',$ par <i>G. Mittag-Leffler</i> . (Extrait d'une lettre à M. E. Picard)	233—246
Théorie des fonctions algébriques d'une variable (Premier mémoire), par <i>K. Hensel</i> . (Traduit par M. G. Brincard)	247—318
Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes, par <i>J. Hadamard</i>	319—336
Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires, par <i>Helge von Koch</i>	337—420
Note additionnelle à l'article sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes, par <i>J. Hadamard</i>	421
Inhaltsverzeichnis. — Table des matières.	

Band 19. — Tome 19.

1895.

Sur les fonctions de n variables complexes, par <i>Pierre Cousin</i>	1—62
Über die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen, von <i>A. Wiman</i>	63—72
Sur les expressions algébriques, par <i>D. Séliwanoff</i>	73—92
Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues, par <i>André Markoff</i>	93—104
Zur Theorie der orthogonalen Determinanten, von <i>E. Netto</i>	105—114
Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene, von <i>S. Kantor</i>	115—194
Über reductible Binome, von <i>K. Th. Vahlen</i>	195—198
Über die Steiner'sche Fläche, von <i>K. Th. Vahlen</i>	199—200
Mémoire sur le pendule de longueur variable, par <i>Léon Lecornu</i>	201—250
Sur les équations de la dynamique, par <i>R. Liouville</i>	251—284
Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires, par <i>E. Goursat</i>	285—340

Sur une généralisation de la formule

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \dots,$$

par *Carl Störmer*..... 341—350

Über die Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante, von *A. Hurwitz*..... 351—384

Über die Structur der Discriminanten und Resultanten von binären Formen, von *Franz Meyer* 385—396

Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.

Band 20. — Tome 20.
1896—1897.

Zur Lehre von den hyperelliptischen Integralen, von *P. Epstein* 1— 58

La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, par *H. Poincaré* ... 59—142

Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q^k + 1$, in welcher $q = 1$ oder eine ungerade Primzahl ist, von *G. Wertheim* 143—152

Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000 (Fortsetzung der Tabelle aus Band 17, Seite 315) von *G. Wertheim*..... 153—158

Sur la déformation des surfaces, par *Julius Weingarten* ... 159—200

Mémoire sur l'élimination, par *J. Hadamard* 201—238

Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un des ses points, par *R. Liouville* 239—284

Sur l'intégrale finie d'une fonction entière, par *A. Hurwitz*..... 285—312

Sur la polarisation par diffraction (Seconde partie), par *H. Poincaré* 313—356

Sur les zéros des fonctions entières, par *Emile Borel* 357—396

Hugo Gylden. Ein biographischer Umriss nebst einigen Bemerkungen über seine wissenschaftlichen Methoden, von *Karl Bohlin* 397—404

Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.

Namenregister der Bände 11 bis 20.

Table générale par noms d'auteurs des volumes 11—20.

APPELL, PAUL EMILE.

Né à Strasbourg le 27 septembre 1855, élève à l'école normale supérieure 1873—1876, répétiteur à l'école des hautes études 1876—1877, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris 1877—1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Dijon 1879—1881, maître de conférences à l'école normale supérieure 1881—1885, professeur de mécanique rationnelle à la faculté des sciences de Paris depuis 1885, membre de l'académie des sciences de Paris depuis 1892.

Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe. t. 12, p. 1—50.

Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.

Mémoire couronné par S. M. le Roi Oscar II le 21 janvier 1889.

t. 13, p. 1—174 *).

Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable. t. 15, p. 281—316.

BERGER, ALEXANDER FREDRIK.

Né à Nysund (Vermeland) en Suède le 30 juin 1844, maître de conférences à l'université d'Upsal depuis 1875.

Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli.

t. 14, p. 249—304.

BOHLIN, KARL.

Né à Stockholm le 30 octobre 1860, assistant à l'observatoire de Stockholm depuis 1884, maître de conférences d'astronomie à l'université d'Upsala en 1886. Directeur de l'observatoire de Stockholm depuis 1897.

Hugo Gylden. Ein biographischer Umriss nebst einigen Bemerkungen über seine wissenschaftlichen Methoden. t. 20, p. 397—404.

*) Ce mémoire est le second des deux mémoires qui forment le tome 13, et qui ont été paginés séparément.

BOREL, EMILE.

Né à St Affrique en France (département d'Aveyron) en janvier 1871, élève de l'école normale en 1889, maître de conférences à l'université de Lille en 1893. Depuis 1897 maître de conférences à l'école normale supérieure.

Sur les zéros des fonctions entières. t. 20, p. 357—396.

BRIOSCHI, FRANCESCO.

Né à Milan le 22 décembre 1824, professeur de mécanique rationnelle à l'université de Pavie en 1850, sous-secrétaire d'État au département de l'instruction publique depuis le mois de juin 1861 jusqu'au mois de décembre 1862, directeur de l'école polytechnique de Milan fondée 1863. Depuis 1865 sénateur du royaume d'Italie. Président de l'Académie des Lincei.

Sur l'équation du sixième degré. t. 12, p. 83—102.

Les invariants des équations différentielles linéaires. t. 14, p. 233—248.

BRUNS, ERNST HEINRICH.

Né à Berlin le 4 septembre 1848, calculateur à l'observatoire de Poulkova en 1872, astronome adjoint à l'observatoire de Dorpat en 1874, professeur extraordinaire de mathématiques à l'université de Berlin en 1876, professeur ordinaire d'astronomie à l'université et directeur de l'observatoire de Leipzig depuis 1882.

Über die Integrale des Vielkörper-Problems. t. 11, p. 25—96.

CASORATI, FELICE.

Né à Pavia le 17 décembre 1835, professeur extraordinaire à l'université de Pavia en 1859, professeur ordinaire en 1862. Mort à Pavia le 11 septembre 1890.

Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Ses rapports avec les mesures de courbure Gaussienne et moyenne. t. 14, p. 95—110.

CASSEL, KARL GUSTAV.

Né à Stockholm le 20 octobre 1866, docteur-ès-sciences à l'université d'Upsal en 1895, professeur de mathématiques au lycée »Realläroverket» à Stockholm depuis 1894.

Sur un problème de représentation conforme. t. 15, p. 33—44.

CATALAN, EUGÈNE-CHARLES.

Né à Bruges le 30 mai 1814, professeur à l'université de Liège en 1865. Mort à Liège le 14 février 1894.

Sur la courbure des surfaces. Lettre adressée à M. Casorati. t. 15, p. 191—192.

COUSIN, PIERRE-AUGUSTE.

Né à Paris le 18 mars 1867, élève à l'école normale supérieure 1886—1889, maître de conférences à la faculté des sciences de Grenoble depuis 1895.

Sur les fonctions de n variables complexes. t. 19, p. 1—62.

DOBRINER, HERMAN.

Né à Schmallingken (Prusse) en Allemagne le 5 novembre 1857, professeur à la »Realschule Philanthropin» à Francfort-sur-le-Mein depuis 1883.

Über das räumliche Achteck welches die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung bilden. t. 12, p. 339—361.

EPSTEIN, PAUL.

Né à Francfort-sur-le-Mein le 24 juillet 1871, maître adjoint au lycée de Saargemünd.

Zur Lehre von den hyperelliptischen Integralen. t. 20, p. 1—58.

FOLIE, FRANÇOIS-JACQUES-PHILIPPE.

Né à Venlo le 11 décembre 1833, docteur en sciences physiques et mathématiques en 1855, professeur à l'école industrielle de Liège en 1864, administrateur-inspecteur de l'université de Liège en 1872, directeur de l'observatoire royal de Belgique en 1885, démissionnaire de ces fonctions en 1897.

Expression complète et signification véritable de la nutation initiale. Démonstration qui en résulte de la fluidité intérieure du globe. Conséquences analytiques de celle-ci dans les formules de l'astronomie. t. 16, p. 365—384.

FRICKE, ROBERT.

Né à Helmstedt en Allemagne le 24 septembre 1861, maître de conférences à l'université de Kiel en 1891, à l'université de Göttingue en 1892, professeur ordinaire à l'école polytechnique de Brunswick depuis 1894.

Entwicklungen zur Transformation fünfter und siebenter Ordnung einiger specieller automorpher Functionen. t. 17, p. 345—396.

GOURSAT, EDOUARD.

Né à Lanzaec (département du Lot) en France le 21 mai 1858, chargé de conférences à la Sorbonne en 1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Toulouse en 1881, maître de conférences à l'école normale supérieure de Paris depuis 1885.

Sur un mode de transformation des surfaces minima. t. 11, p. 135—186.

Sur un mode de transformation des surfaces minima (Second mémoire). t. 11, p. 257—264.

Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires. t. 19, p. 285—340.

GRAM, JÜRGEN PEDERSEN.

Né à Nustrup (Nordslesvig) en Danémarc le 27 juin 1850, directeur de la compagnie d'assurances »Skjold» à Copenhague depuis 1884.

Rapport sur quelques calculs enterpris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers. t. 17, p. 301—314.

GUICHARD, CLAUDE.

Né à Azé (Saône-et-Loire) en France le 28 décembre 1861, élève à l'école normale supérieure en 1880, actuellement professeur à l'université de Clermont.

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

t. 12, p. 57—62.

GYLDÉN, JOHAN AUGUST HUGO.

Né à Helsingfors le 29 mai 1841, maître de conférences à l'université de Helsingfors en 1862, astronome adjoint à l'observatoire de Poulkova en 1863, astronome titulaire au même observatoire en 1865, directeur de l'observatoire de Stockholm en 1871. Mort à Stockholm le 9 novembre 1896.

Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes.

t. 15, p. 65—190,

t. 17, p. 1—168.

HACKS, JACOB.

Né à Süchteln (Rheinprovinz) en Allemagne le 6 juin 1863, docteur ès sciences en 1887, professeur au lycée de Kattowitz (Silésie) depuis 1894.

Scherings Beweis des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste dargestellt mit Hilfe des Zeichens $[x]$. t. 12, p. 109—112.

Über die Classenanzahl der zu einer negativen Determinante $D = -q$ gehörigen eigentlich primitiven quadratischen Formen, wo q eine Primzahl von der Form $4n + 3$ ist. t. 14, p. 321—328.

Einige Anwendungen der Function $[x]$. t. 14, p. 329—336.

Über einige für Primzahlen charakteristische Beziehungen. t. 17, p. 205—208.

HADAMARD, JACQUES.

Né à Versailles en France le 8 décembre 1865, chargé de cours à la faculté des sciences de Bordeaux en 1893, professeur à la même faculté depuis 1896.

Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes. t. 18, p. 319—336.

Note additionnelle à l'article »Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes«.

t. 18, p. 421—422.

Mémoire sur l'élimination.

t. 20, p. 201—238.

HENSEL, KURT.

Né à Königsberg le 29 décembre 1861, maître de conférences à l'université de Berlin en 1886, professeur extra-ordinaire à la même université depuis 1892.

Über die Darstellung der Determinante eines Systems welches aus zwei anderen componirt ist. t. 14, p. 317—320.

Théorie des fonctions algébriques d'une variable. (Premier Mémoire). Traduit par M. G. BRINCARD. t. 18, p. 247—318.

HERTZ, HEINRICH RUDOLF.

Né à Hambourg le 22 février 1857, maître de conférences à l'université de Kiel en 1884, professeur de physique expérimentale à l'école polytechnique de Karlsruhe en 1885, professeur à l'université de Bonn en 1889, décédé le 1 janvier 1894.

Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en mouvement. (Traduit de l'allemand des Annales de WIEDEMANN.)

t. 14, p. 349—376.

HEUN, KARL.

Né à Wiesbade en Allemagne le 3 avril 1859, maître de conférences à l'université de Munich 1885—1888, professeur à la 1^{re} »Realschule» de Berlin (Oberlehrer) depuis 1890.

Zur Theorie der mehrwerthigen, mehrfach lineär verknüpften Functionen.

t. 11, p. 97—118.

Bemerkungen zur Theorie der mehrfach lineär verknüpften Functionen.

t. 12, p. 103—108.

HILBERT, DAVID.

Né à Königsberg en Allemagne (Prusse) le 23 janvier 1862, maître de conférences à l'université de Königsberg en 1886, professeur extraordinaire à la même université en 1892, professeur ordinaire en 1893, professeur à l'université de Göttingue depuis 1895.

Über die Diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null.

En commun avec M. A. HURWITZ.

t. 14, p. 207—224.

Über ternäre definite Formen.

t. 17, p. 169—198.

Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms.

t. 18, p. 155—160.

HORN, JACOB.

Né le 14 février 1867 à Rehbach (Odenwald, Allemagne), maître de conférences à l'université de Freiburg en Bade en 1890, maître de conférences à l'école polytechnique de Charlottenburg depuis 1892.

Über ein System linearer partieller Differentialgleichungen.

t. 12, p. 113—176.

Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen.

t. 14, p. 337—348.

HURWITZ, ADOLF.

Né à Hildesheim (Hannover) en Allemagne le 26 mars 1859, maître de conférences à l'université de Göttingue en 1882, professeur extraordinaire à l'université de Königsberg en 1884, professeur ordinaire à l'école polytechnique de Zürich depuis 1892.

Über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche.

t. 11, p. 187—200.

Über eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Grössen.

t. 12, p. 367—405.

Über beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen.

t. 14, p. 211—216.

HURWITZ, ADOLF.

Über die Diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null.

En commun avec M. D. HILBERT.

t. 14, p. 217—224.

Über die Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.

t. 19, p. 351—384.

Sur l'intégrale finie d'une fonction entière.

t. 20, p. 285—312.

JUEL, CHRISTIAN SOPHUS.

Né à Randers en Danémarc le 25 janvier 1855, professeur à l'école polytechnique de Copenhague depuis 1894.

Über einige Grundgebilde der projectiven Geometrie.

t. 14, p. 1—30.

KANTOR, SELIGMANN.

Né à Soborten (Bohème) en Autriche le 6 décembre 1857, maître de conférences à l'école polytechnique et à l'université de Prague 1881—1884 et 1883—1886.

Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene.

t. 19, p. 115—194.

KELVIN, LORD. (SIR WILLIAM THOMSON.)

Né à Belfast en Irlande le 26 juin 1824, professeur à l'université de Glasgow depuis 1846, nobilisé en 1866, baronisé en 1892.

On the division of space with minimum partitional area.

t. 11, p. 121—134.

KIRCHHOFF, GUSTAV ROBERT.

Né le 12 mars 1824 à Königsberg, maître de conférences à l'université de Berlin en 1847, professeur extraordinaire à l'université de Breslau en 1850, professeur ordinaire à l'université de Heidelberg en 1854, à l'université de Berlin en 1875. Mort le 17 octobre 1887.

Beweis der Existenz des Potentials das an der Grenze des betrachteten Raumes gegebene Werte hat für den Fall dass diese Grenze eine überall convexe Fläche ist.

t. 14, p. 179—184.

KNOBLAUCH, JOHANNES.

Né à Halle en Allemagne le 27 août 1855, maître de conférences à l'université de Berlin en 1883, professeur à la même université depuis 1889.

Über die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen.

t. 15, p. 249—258.

KOBB, GUSTAF.

Né à Gothenbourg en Suède le 25 juillet 1863, licencié ès sciences en 1885, maître de conférences à la faculté des sciences de Stockholm depuis 1889.

Sur les maxima et les minima des intégrales doubles.

t. 16, p. 65—140.

Sur les maxima et les minima des intégrales doubles. Second mémoire.

t. 17, p. 321—344.

VON KOCH, NILS FABIAN HELGE.

Né à Stockholm le 25 janvier 1870, docteur ès sciences en 1892, maître de conférences à la faculté des sciences de Stockholm depuis 1892.

Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires. t. 15, p. 53—64.

Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires. t. 16, p. 217—296.

Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires. t. 18, p. 337—420.

KÖTTER, FRITZ.

Né à Berlin le 3 novembre 1857, maître de conférences à l'école polytechnique de Berlin en 1887, chargé de cours à l'école des mines de Berlin en 1889, professeur à la même institution depuis 1895.

Sur le cas traité par M^{me} Kowalevski de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. t. 17, p. 209—264.

KOWALEVSKI (Kovalevsky), SOPHIE.

Née CORVIN-KROTKOWSKY à Moscou le 25 janvier 1850, mariée à Woldemar Kovalevsky en 1868, docteur ès sciences à Göttingue en 1874, professeur d'analyse supérieure à la faculté des sciences de Stockholm en 1884. Décédée à Stockholm le 10 février 1891.

Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. t. 12, p. 177—232.

Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. t. 14, p. 81—94.

Sur un théorème de M. Bruns. t. 15, p. 45—52.

KRAZER, ADOLF.

Né à Zusmarshausen en Bavière le 15 avril 1858, maître de conférences à l'université de Würzburg en 1883, professeur extraordinaire à l'université de Strasbourg depuis 1889.

Über lineare Relationen zwischen Thetaproducten. t. 17, p. 281—296.

LECORNU, LÉON-FRANÇOIS-ALFRED.

Né à Caen en France le 13 janvier 1854, ingénieur en chef des mines, répétiteur de mécanique à l'école polytechnique.

Mémoire sur le pendule de longueur variable. t. 19, p. 201—250.

LERCH, MATYÁŠ.

Né à Milínov en Bohême le 20 février 1860, maître de conférences à l'école polytechnique tchèque de Prague depuis 1886.

Note sur la fonction $\Re(w, x, s) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}$. t. 11, p. 19—24.

Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques. t. 12, p. 51—56.

VON LILIENTHAL, REINHOLD.

Né à Berlin le 25 juin 1857, maître de conférences à l'université de Bonn en 1883, professeur à l'institut pédagogique de Santiago (Chili) en 1889, professeur à l'académie de Münster depuis 1891.

Bemerkung über diejenigen Flächen bei denen die Differenz der Hauptkrümmungsradien constant ist. t. 11, p. 391—394.

Zur Theorie des Krümmungsmaasses der Flächen. t. 16, p. 143—152.

LINDELÖF, LORENZ LEONARD.

Né à Karvia en Finlande le 13 novembre 1827, professeur à l'université de Helsingfors en 1857, directeur en chef de l'administration centrale des établissements d'instruction en Finlande depuis 1874.

Sur la théorie des caisses de pension. t. 18, p. 89—96.

LIOUVILLE, ROGER.

Né à St Aubin sur Aire (Meuse) en France, le 14 mars 1856, ingénieur des poudres et salpêtres, depuis 1876, répétiteur d'analyse à l'école polytechnique depuis 1886.

Sur les équations de la dynamique. t. 19, p. 251—284.

Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points. t. 20, p. 239—284.

LOHNSTEIN, THEODOR.

Né à Berlin le 6 juin 1866, docteur en philosophie en 1891, médecin.

Notiz über eine Methode zur numerischen Umkehrung gewisser Transcendenten. t. 16, p. 141—142.

MARKOFF, ANDRÉ.

Né à Riazan en Russie le 2 juin 1856, professeur à l'université de St Pétersbourg depuis 1886.

Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues. t. 19, p. 93—104.

MELLIN, ROBERT HJALMAR.

Né à Törnävä (Österbotten) en Finlande le 19 juin 1854, maître de conférences à l'université de Helsingfors en 1884, professeur à l'école polytechnique de Helsingfors depuis 1884.

Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung, t. 15, p. 317—384.

MEYER, FRANZ.

Né à Magdebourg le 2 septembre 1856, maître de conférences à l'université de Tubingue en 1880, professeur extraordinaire à la même université en 1885, professeur ordinaire à la »Bergakademie» de Clausthal depuis 1888.

Über die Structur der Discriminanten und Resultanten von binären Formen. t. 19, p. 385—396.

MITTAG-LEFFLER, MAGNUS GUSTAF.

Né à Stockholm le 16 mars 1846, maître de conférences à l'université d'Upsal en 1872, professeur à l'université de Helsingfors (Finlande) en 1877 et à la faculté des sciences de Stockholm depuis 1881.

Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène. t. 15, p. 1—32.

Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm. Extrait d'une lettre M. Mittag-Leffler à M. Poincaré. t. 15, p. 279—280.

Sophie Kovalevsky. Notice biographique. t. 16, p. 385—392.

Sur l'intégration de l'équation différentielle

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'.$$

(Extrait d'une lettre à M. E. Picard). t. 18, p. 233—246.

NETTO, EUGEN.

Né à Halle a/S. en Allemagne le 30 juin 1846, professeur à l'université de Strasbourg en 1879, à l'université de Berlin en 1882, à l'université de Giessen depuis 1888.

Zwei Determinantensätze. t. 17, p. 199—204.

Zur Theorie der linearen Substitutionen. t. 17, p. 265—280.

Zur Theorie der orthogonalen Determinanten. t. 19, p. 105—114.

PADÉ, HENRI.

Né à Abbeville en France le 18 décembre 1863, élève de l'école normale supérieure de Paris en 1883; maître de conférences à la faculté des sciences de l'université de Lille, depuis 1897.

Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles. t. 18, p. 97—112.

PETERSEN, PETER CHRISTIAN JULIUS.

Né à Sorö (Sjælland) en Danémarc le 16 juin 1839, professeur à l'école polytechnique de Copenhague en 1871, professeur ordinaire à l'université de la même ville depuis 1887.

Die Theorie der regulären graphs. t. 15, p. 193—220.

PHRAGMÉN, LARS EDVARD.

Né à Örebro en Suède le 2 octobre 1863, maître de conférences à la faculté des sciences de Stockholm en 1890, professeur à la même faculté depuis 1892.

Remarques sur la théorie de la représentation conforme. t. 14, p. 225—232.

PICARD, CHARLES-EMILE.

Né à Paris le 24 juillet 1856, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris en 1877, chargé de cours à la faculté des sciences de Toulouse en 1879, et à la faculté des sciences de Paris en 1881, professeur à la faculté des sciences de Paris depuis 1886, membre de l'institut de France en 1889.

PICARD, CHARLES-EMILE.

- Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une équation algébrique. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler. t. 11, p. 1—12.
- Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. t. 12, p. 323—338.
- Remarques sur les équations différentielles. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler. t. 17, p. 297—300.
- Sur une classe de transcendantes nouvelles. (Premier mémoire.) t. 18, p. 133—154.

PINCHERLE, SALVATORE.

Né à Trieste le 11 mars 1853, professeur à l'université de Pavie en 1875, professeur à l'université de Bologne depuis 1886.

- Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle. t. 16, p. 341—364.

POINCARÉ, HENRI.

Né à Nancy en France le 29 avril 1854, ingénieur de mines en 1879, chargé de cours à la faculté des sciences de Caen en 1879, maître de conférences à la faculté des sciences de Paris en 1881, chargé de cours en 1884, professeur à la faculté des sciences de Paris depuis 1886, membre de l'institut de France en 1887.

- Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Mémoire couronné du prix de S. M. le Roi Oscar II, le 21 janvier 1889. t. 13, p. 1—270.
- Sur la polarisation par diffraction. t. 16, p. 297—340.
- La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. t. 20, p. 59—142.
- Sur la polarisation par diffraction. t. 20, p. 313—356.

PTASZYCKI, IVAN.

Maître de conférences à l'université de St Pétersbourg.

- Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques. t. 11, p. 395—400.

RASCHKE, WALTHER.

Docteur en philosophie à Heidelberg en 1883. Mort à Danzig en 1884.

- Über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung in welchen die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt. t. 14, p. 31—80.

RUNGE, CARL.

Né à Bremen le 30 août 1856, maître de conférences à l'université de Berlin en 1883, professeur à l'école polytechnique de Hanovre depuis 1886.

RUNGE, CARL.

Über eine numerische Berechnung der Argumente der cyklischen, hyperbolischen und elliptischen Functionen. t. 15, p. 221—248.

SCHEFFERS, GEORG WILHELM.

Né à Altendorf près Holzminden (duché de Brunswick) le 21 novembre 1866, maître de conférences à l'université de Leipzig en 1891, professeur extraordinaire à l'école polytechnique (Technische Hochschule) de Darmstadt depuis 1896.

Bestimmung einer Klasse von Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes. t. 14, p. 111—178.

SCHROETER, HEINRICH EDUARD.

Né le 8 janvier 1829 à Königsberg, maître de conférences à l'université de Breslau en 1855, professeur extraordinaire à la même université en 1858 et professeur ordinaire en 1861. Mort à Breslau le 3 janvier 1892.

Über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung. Auszug eines Schreibens an Herrn H. G. Zeuthen. t. 14, p. 207—210.

SCHWERING, KARL.

Né à Osterwick (Westphalen) en Allemagne le 28 septembre 1846, maître de conférences à l'académie de Münster en 1872, professeur de mathématiques au lycée de Brilon en 1875, au lycée de Coesfeld en 1878, directeur du lycée de Düren depuis 1892.

Eine Eigenschaft der Primzahl 107. t. 11, p. 119—120.

Untersuchungen über die Normen complexer Zahlen. t. 11, p. 265—296.

SÉLIVANOFF, DMITRI.

Né à Gorodisché (gouvernement de Pensa) en Russie le 5^e février 1855, maître de conférences à l'université de St Pétersbourg en 1885, chargé de cours à l'université de femmes de la même ville en 1889 et à l'institut technologique en 1892.

Sur les expressions algébriques. t. 19, p. 73—92.

SÖDERBERG, JAKOB THEODOR.

Né à Hanebo en Suède le 12 septembre 1856, maître de conférences à l'université d'Upsal depuis 1886.

Démonstration du théorème fondamental de Galois dans la théorie de la résolution algébrique des équations. t. 11, p. 297—302.

STAUDE, OTTO.

Né à Limbach (Sachsen) en Allemagne le 27 mars 1857, maître de conférences à l'université de Breslau en 1883, professeur à l'université de Dorpat en 1886, professeur à l'université de Rostock depuis 1888.

Über die Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche. t. 11, p. 303—332.

STENBERG, EMIL ARVID.

Né à Helsingfors le 14 février 1858, maître de conférences à l'université de Helsingfors depuis 1886.

Über die allgemeine Form der eindeutigen Integrale der linearen homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten.

t. 15, p. 259—278.

STÖRMER, FREDRIK CARL MÜLERTZ.

Né à Skien en Norvège le 3 septembre 1874, étudiant à l'université de Christiania.

Sur une généralisation de la formule

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1} - \frac{\sin 2 \varphi}{2} + \frac{\sin 3 \varphi}{3} - \dots$$

t. 19, p. 341—350.

STRAUSS, EMIL.

Né à Francfort-sur-le-Main le 5 mai 1859, professeur à la »Realschule Philantropin» en 1882. Mort à Francfort le 6 février 1892.

Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionen-theoretischer Anwendung.

t. 11, p. 13—18.

SYLOW, PETER LUDVIG MEJDELL.

Né le 12 décembre 1832 à Christiania, professeur au lycée de Fredrikshald depuis 1858.

Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier.

t. 11, p. 201—256.

SYLVESTER, JAMES JOSEPH.

Né à Londres le 3 septembre 1814, professeur à l'académie militaire de Wolwich de 1835 à 1870; à l'université de Baltimore de 1875—1883, à l'université d'Oxford de 1883 à 1892. Mort à Londres le 15 mars 1897.

On a funicular solution of Buffon's »Problem of the needle» in its most general form.

t. 14, p. 185—206.

TCHEBYCHEFF, PAFNUTI.

Né à Borowsk (près Moscou) le 14 mars 1821, agrégé à l'académie des sciences de St Pétersbourg en 1853, membre ordinaire de la même académie en 1859, professeur à l'université de St Pétersbourg. Mort à St Pétersbourg le 26 novembre 1894 (vieux style).

Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales.

(Traduit du russe par I. LYON.)

t. 12, p. 287—322.

Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. (Traduit du russe par I. LYON.)

t. 14, p. 305—316.

Angenäherte Darstellung der Kvadratwurzel einer Veränderlichen mittelst einfacher Brüche. Aus dem Russischen überetzt von O. BACKLUND.

t. 18, p. 113—132.

THOMSON, SIR WILLIAM.

Voir KELVIN.

TRESSE, ARTHUR.

Né à Martigny-les-Bains en France le 24 avril 1868, professeur de mathématiques aux lycées de Douai (1893), de Montpellier (1895) et de Nancy (1896).

Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformation.

t. 18, p. 1—88.

VAHLEN, KARL THEODOR.

Né à Vienne le 30 juin 1869, docteur en philosophie à Berlin en 1893, chargé de cours à l'université de Königsberg en Prusse.

Über reductible Binome.

t. 19, p. 195—198.

Über die Steinersche Fläche.

t. 19, p. 199—200.

VOLTERRA, VITO.

Né à Ancona en Italie le 3 mai 1860, préparateur de physique à l'institut technique de Florence en 1877, assistant à l'université de Pise en 1882, professeur de mécanique à l'université de Pise en 1883, professeur de mécanique rationnelle et de mécanique supérieure à l'université de Turin depuis 1893.

Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire (1^{er} Mémoire).

t. 12, p. 233—286.

Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.

t. 16, p. 153—216.

Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.

t. 18, p. 161—232.

VRIES, JAN DE.

Né à Amsterdam le 1 mars 1858, docteur en sciences mathématiques et physiques en 1881, professeur de mathématiques à Kampen en 1880, à Haarlem en 1892, professeur à l'école polytechnique de Delft en 1894, membre de l'académie des sciences d'Amsterdam en 1894, professeur ordinaire à l'université d'Utrecht depuis 1897.

Über gewisse ebene Configurationen.

t. 12, p. 63—82.

WEBER, HEINRICH.

Né à Heidelberg le 5 mars 1842, maître de conférences à l'université de Heidelberg 1866—1869, professeur extraordinaire à la même université en 1869, professeur à l'école polytechnique de Zürich 1870—1875, à l'université de Königsberg 1875—1883, à l'école polytechnique de Berlin 1883—1884, à l'université de Marburg 1884—1892, à l'université de Göttingue 1892—1895, à l'université de Strasbourg depuis 1895.

Zur Theorie der elliptischen Functionen (zweite Abhandlung).

t. 11, p. 333—390.

WEINGARTEN, JULIUS.

Né à Berlin le 25 mars 1836, professeur à l'école royale des hautes études techniques (Technische Hochschule) de Berlin depuis 1864.

Sur la déformation des surfaces.

t. 20, p. 159—200.

WERTHEIM, GUSTAV.

Né à Imbshausen (Hanovre) en Allemagne le 9 juin 1843, professeur à la »Realschule Philantropin» à Francfort-sur-le-Main depuis 1870.

Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller ungeraden Primzahlen p unter 3000. t. 17, p. 315—320.

Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q^{\lambda} + 1$, in welcher $q = 1$ oder eine ungerade Primzahl ist. t. 20, p. 143—152.

Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000. (Fortsetzung der Tabelle aus Band 17, Seite 315.) t. 20, p. 153—158.

WIMAN, ANDERS.

Né à Hammarlöv (Scanie) en Suède le 11 février 1865, maître de conférences à l'université de Lund depuis 1892.

Über die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen. t. 19, p. 63—72.

ZEUTHEN, HIERONYMUS GEORG.

Né à Grimstorp (Jylland) en Danémarc le 15 février 1839, professeur extraordinaire à l'université de Copenhague en 1871, professeur ordinaire depuis 1886.

Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre. t. 12, p. 362—366.

ŻORAWSKI, KASIMIERZ.

Né à Szezurzyn près de Varsovie le 22 juin 1866, maître de conférences à l'école polytechnique de Léopol en 1892, professeur extraordinaire à l'université de Cracovie en 1895.

Über Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie. t. 16, p. 1—64.

QA

1

Acta mathematica

A2575

v. 21

Physical Sci.

Applied Sci.

Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
